Correction: Asie 20 Juin 2019

Exercice 1:

Partie A:

1) $\mathbf{T}_n$: température de café à l'instant n, $\mathbf{T}_0 = \mathbf{80}\ ^\circ\ \mathbf{C}$

Une tasse de café est servie à une température initiale de $\mathbf{80}\ ^\circ\ \mathbf{C}$ dans un milieu dont la température supposée constante, est notée $\mathbf{M}$: donc comme $\mathbf{M} = \mathbf{10}$,

$\mathbf{T}_{n+1} - \mathbf{T}_n = -0{,}2\left(\mathbf{T}_n - 10\right)$ avec $\mathbf{T}_n - 10 \geqslant 0$

D'où $\mathbf{T}_{N+1} - \mathbf{T}_n \leqslant 0$

La suite $\left(\mathbf{T}_n\right)$ est décroissante

2) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{T}_{n+1} - \mathbf{T}_n = -0{,}2\left(\mathbf{T}_n - 10\right) \Leftrightarrow \mathbf{T}_{n+1} = \mathbf{T}_n - 0{,}2\ \mathbf{T}_n + 2$

$\Leftrightarrow \mathbf{T}_{n+1} = 0{,}8\ \mathbf{T}_n + 2$

3)a) $u_{n+1} = \mathbf{T}_{n+1} - 10 = 0{,}8\ \mathbf{T}_n + 2 - 10 = 0{,}8\ \mathbf{T}_n - 8$

$\Leftrightarrow u_{n+1} = 0{,}8\left(\mathbf{T}_n - \dfrac{8}{0{,}8}\right) = 0{,}8\left(\mathbf{T}_n - 10\right)$

$\Leftrightarrow u_{n+1} = 0{,}8\ u_n$

La suite $\left(u_n\right)$ est géométrique de raison $q = 0{,}8$ et de premier terme $u_0 = \mathbf{T}_0 - 10 = 70$

3)b) Expression de u_n en fonction de n:

$u_n = u_0 \times q^n$ donc $u_n = 70 \times (0{,}8)^n$

Expression de $\mathbf{T}_n$ en fonction de n:

$u_n = \mathbf{T}_n - 10 \Leftrightarrow \mathbf{T}_n = u_n + 10 \Leftrightarrow \mathbf{T}_n = 10 + 70 \times (0{,}8)^n$

3)c) $\mathbf{T}_n = 10 + 70 \times (0{,}8)^n$ comme $0 < q = 0{,}8 < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(0{,}8^n\right) = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\mathbf{T}_n\right) = 10$

4)a) A la calculatrice, on trouve:

n	0	1	2	3	4
$\mathbf{T}_n$	80	66	54,8	45,8	38,7

A la fin de l'algorithme, la variable n contient la valeur $\mathbf{4}$

4)b) Il faut au moins $\mathbf{4}$ minutes pour que la température du café soit inférieure à $\mathbf{40}\ ^\circ\ \mathbf{C}$

Partie B:

1)a) La fonction f est dérivable sur $[\,0\ ;+\infty\,[$ (fonction exp est dérivable sur $\mathbf{R}$)

$\mathbf{f}(t) = \dfrac{\theta\ (t)}{e^{-0{,}2t}}$ (forme $\dfrac{u}{v}$ dérivée: $\dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$)

$\mathbf{f}'(t) = \dfrac{\theta'(t)\ e^{-0{,}2t} - \left(-0{,}2\ e^{-0{,}2t}\right)\theta\ (t)}{\left(e^{-0{,}2t}\right)^2} = \dfrac{e^{-0{,}2t}\left(\theta'(t) + 0{,}2\ \theta\ (t)\right)}{\left(e^{-0{,}2t}\right)^2}$

Or on sait que: $\theta'(t) = -0{,}2\ \rho\ (t) \Leftrightarrow \theta'(t) + 0{,}2\ \theta\ (t) = 0$

Donc $f'(t) = 0$ d'où $f(t) = \mathbf{C}$, $\mathbf{C} \in \mathbf{R}$

1)b) $f(0) = \dfrac{\theta\ (0)}{e^0} = \theta\ (0) = 80$

Comme $f(0) = 80$ et $f(t) = \mathbf{C}$, $\mathbf{C} \in \mathbf{R}$, on obtient: $f(t) = 80$

Par conséquent, on a $\mathbf{f}(t) = \dfrac{\theta\ (t)}{e^{-0{,}2t}} \Leftrightarrow f(t) \times e^{-0{,}2t} = \theta\ (t) \Leftrightarrow \theta\ (t) = 80\ e^{-0{,}2t}$

1)c) $\theta\ (t) = 80\ e^{-0{,}2t}$ et $\theta\ (0) = 80$; la fonction θ est dérivable sur $[\,0\ ;+\infty\,[$

Pour tout $t \geqslant 0$, on a: $\theta'(t) = 80 \times \left(-0{,}2\ e^{-0{,}2t}\right) = -0{,}2 \times \left(80\ e^{-0{,}2t}\right) = -0{,}2\ \theta\ (t)$

La fonction θ est solution du problème

2) $g\ (t) = 10 + 70\ e^{-0{,}2t}$ et $g\ (0) = 80$; la fonction g est dérivable sur $[\,0\ ;+\infty\,[$

Pour tout $t \geqslant 0$, on a: $g'(t) = 70 \times \left(-0{,}2\ e^{-0{,}2t}\right) = -14 \times e^{-0{,}2t}$

Tableau de variations:

t	0	t_0	$+\infty$
$\mathbf{g}'(t)$	$-$		$-$
$\mathbf{g}(t)$	80 ↘	40	↘ 10

avec $\begin{cases} \mathbf{g}(0) = 0 \\ \lim\limits_{t \to +\infty} \mathbf{g}(t) = 10 \end{cases}$ car $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0{,}2t} = 0$

La foncton g est continue et strictement décroissante sur $[\,0\ ;+\infty\,[$

Comme $\mathbf{40} \in \,]\,\mathbf{10}\ ;\mathbf{80}\,]$,

d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution $t_0 \in [\,0\ ;+\infty\,[$ telle que $g\left(t_0\right) = \mathbf{40}$

A la calculatrice, on trouve: $t_0 \approx 4{,}24$ soit $\mathbf{4}$ **min** $\mathbf{14}\ s\,e\,c$ ($0{,}24 \times 60 = 14{,}4$ d'où $\mathbf{14}\ s\,e\,c$ arrondi à la seconde)

Exercice 2:

1) Plan $\mathbf{P}$: $3x + 2y + 9z - 5 = 0$ vecteur normal $\vec{n}\ (3\ ;2\ ;9)$

Droite d : $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 - t \\ z = 9 - t \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$ vecteur directeur $\vec{u}\ (4\ ;-1\ ;-1)$

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires ($\vec{n}=k\,\vec{u}$: $3=4\,k$ soit $k=\frac{3}{4}$ et $2=-k$ soit $k=-2$ donc $\frac{3}{4}\neq-2$)

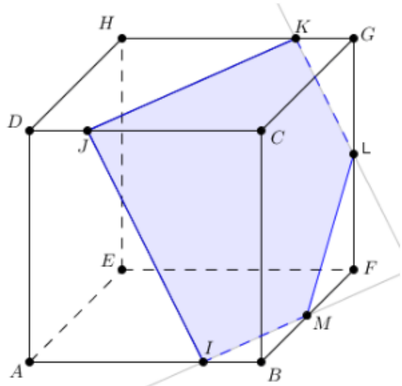
Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas orthogonaux ($\vec{n}\cdot\vec{u}=12-2-9=1\neq0$)

$$\begin{cases}x=3+4\,t\\y=2-t\\z=9-t\\3\,x+2\,y+9\,z-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3+4\,t\\y=2-t\\z=9-t\\3\,(3+4\,t)+2\,(2-t)+9\,(9-t)-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3+4\,t\\y=2-t\\z=9-t\\t+89=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-89\\x=3+4\times(-89)=-353\\y=2-(-89)=91\\z=9-(-89)=98\end{cases}$$

Le point de coordonnées $(-353\;;91\;;98)$ appartient à la fois à la droite d et au plan $\mathbf{P}$

Affirmation D

2) Figure:



$$hypothèses:\begin{cases}\overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}\,\overrightarrow{AB}\\\overrightarrow{DJ}=\frac{1}{4}\,\overrightarrow{DC}\\\overrightarrow{HK}=\frac{3}{4}\,\overrightarrow{HG}\end{cases}$$

la section du cube $\mathbf{ABCDEFGH}$ par le plan $(\mathbf{IJK})$ est un pentagone.

Affirmation C

3) Droite d : $\begin{cases}x=2+t\\y=2\\z=-6+5\,t\end{cases}$, $t\in\mathbf{R}$ vecteur directeur $\vec{u}\,(1\;;0\;;5)$ et $\mathbf{B}\,(2\;;2\;;-6)\in d$

$\mathbf{A}\,(-2\;;1\;;0)$ et $\mathbf{M}\in d$

$$\mathbf{AM}=\sqrt{\left(x-x_{\mathrm{A}}\right)^2+\left(y-y_{\mathrm{A}}\right)^2+\left(z-z_{\mathrm{A}}\right)^2}=\sqrt{(2+t+2)^2+(2-1)^2+(-6+5\,t)^2}$$

$$\mathbf{AM}=\sqrt{(4+t)^2+(1)^2+(-6+5\,t)^2}=\sqrt{16+8\,t+t^2+1+36-60\,t+25\,t^2}$$

$\mathbf{AM}=\sqrt{26\,t^2-52\,t+53}$ soit $\mathbf{AM}^2=26\,t^2-52\,t+53$

$26\,t^2-52\,t+53$:?

t	$-\infty$ $\quad \alpha=-\frac{b}{2\,a}=\frac{52}{2\times26}=1 \quad$ $+\infty$
$26\,t^2-52\,t+53$	$\searrow$ $\quad \mathrm{f}(\alpha)=\mathrm{f}(1)=27 \quad$ $\nearrow$

$\mathrm{S}\left(\alpha\;;\beta=\mathrm{f}(\alpha)\right)$

Le minimum est atteint pour $t=1$ et vaut 27

Donc $\mathbf{AM}=\sqrt{27}$

Affirmation B

4) Plan $\mathbf{P}$: $x+2\,y-3\,z+1=0$ vecteur normal $\vec{n}\,(1\;;2\;;-3)$

Plan $\mathbf{P'}$: $2\,x-y+2=0$ vecteur normal $\overrightarrow{n'}\,(2\;;-1\;;0)$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{n'}=2-2+0=0$

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux, les plans $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P'}$ sont perpendiculaires

$\mathbf{P}$ et $\mathbf{P'}$ sont sécants suivant une droite d de vecteur directeur $\vec{u}$

$\vec{u}$ un vecteur directeur de la droite d : $\vec{u}\,(a\;;b\;;c)$

$\vec{n}\cdot\vec{u}=a+2\,b-3\,c=0$

$\overrightarrow{n'}\cdot\vec{u}=2\,a-b=0$

$$\begin{cases}2\,a-b=0\\a+2\,b-3\,c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2\,a\\5\,a-3\,c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=a\\b=2\,a\\c=\frac{5}{3}\,a\end{cases}$$

On choisit $a=3$

Le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées : $\vec{u}\,(3\;;6\;;5)$

Vérifions que le point $\mathbf{D}\in\mathbf{P}$ et $\mathbf{D}\in\mathbf{P'}$:

$\begin{cases}x_{\mathrm{D}}+2\,y_{\mathrm{D}}-3\,z_{\mathrm{D}}+1=-1+1=0\\2\,x_{\mathrm{D}}-y_{\mathrm{D}}+2=-2+2=0\end{cases}$ Donc $\mathbf{D}\in\mathbf{P}$ et $\mathbf{D}\in\mathbf{P'}$

Affirmation D

Exercice 3:

Partie A:

1) F: "la personne est une femme": $\mathbf{P}(\mathbf{F})=0{,}52$

B: "la personne a déjà consmmé des produits bio": $\mathbf{P}(\mathbf{B})=0{,}92$

On sait que parmi les consommateurs de produits bio, $55\,\%$ étaient des femmes: $\mathbf{P}_{\mathbf{B}}(\mathbf{F})=0{,}55$

2)a) $\mathbf{P}(\mathbf{F}\cap\mathbf{B})=\mathbf{P}(\mathbf{B})\times\mathbf{P}_{\mathbf{B}}(\mathbf{F})=0{,}92\times0{,}55=0{,}506$

2)b) On veut calculer: $\mathbf{P}_{\mathbf{F}}(\mathbf{B})=\frac{\mathbf{P}(\mathbf{F}\cap\mathbf{B})}{\mathbf{P}(\mathbf{F})}=\frac{0{,}506}{0{,}52}\approx0{,}973$

La probabilité qu'une personne ait consommé des produits bio en 2017, sachant que c'est une femme est environ égale à $0{,}973$

.3) Calcul de : $P_H\left(B^-\right)$

$P(H)=1-P(F)=1-0,52=0,48$

$P\left(B^-\right)=P\left(F\cap B^-\right)+P\left(H\cap B^-\right)$

avec $\begin{cases}P\left(B^-\right)=1-P(B)=1-0,92\\ P_F(B)\approx 0,973\\ P\left(F\cap B^-\right)=P(F)\times P_F\left(B^-\right)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}P\left(B^-\right)=0,08\\ P_F\left(B^-\right)=1-P_F(B)\approx 1-0,973\approx 0,027\\ P\left(F\cap B^-\right)\approx 0,52\times 0,027\approx 0,01404\end{cases}$

$P\left(B^-\right)=P\left(F\cap B^-\right)+P\left(H\cap B^-\right) \Leftrightarrow P\left(B^-\right)-P\left(F\cap B^-\right)=P\left(H\cap B^-\right)$

$\Leftrightarrow P\left(H\cap B^-\right)\approx 0,066$

$P_H\left(B^-\right)=\dfrac{P\left(H\cap B^-\right)}{P(H)}\approx\dfrac{0,066}{0,48}\approx 0,137$

La probabilité qu'une personne n'ait pas consommé des produits bio en 2017, sachant que c'est un homme est environ égale à $0,137$

Partie B:

On sait que: $p=0,75$ $n=2000\geqslant 30$; $n\times p=2000\times 0,75=1500\geqslant 5$ et $n\times(1-p)=2000\times 0,25=500\geqslant 5$

Les condions sont vérifiées

Intervalle de fluctuation au seuil de $95\ \%$: $I=\left[p-1,96\times\sqrt{\dfrac{p\times(1-p)}{n}}\ ;\ p+1,96\sqrt{\dfrac{p\times(1-p)}{n}}\right]$

$I=\left[0,75-1,96\times\sqrt{\dfrac{0,75\times 0,25}{2000}}\ ;\ 0,75+1,96\times\sqrt{\dfrac{0,75\times 0,25}{2000}}\right]$

D'où $I\approx[0,731\ ;\ 0,769]$

Calculons la fréquence observée: $f_{obs}=\dfrac{1421}{2000}\approx 0,71$

On constate que $f_{obs}\notin I$, ce qui remet en cause l'affirmation du chef de rayon.

Partie C:

1) La fonction f définie sur $[3\ ;\ 4]$ par: $f(x)=\dfrac{2}{(x-2)^2}$

$x-2\neq 0$ et $(x-2)^2>0$

Sur $[3\ ;\ 4]$, $f(x)\geqslant 0$

$I=\int_3^4 f(x)\ dx=\displaystyle\int_3^4\left(\frac{2}{(x-2)^2}\right)dx=-2\int_3^4\left(\frac{-1}{(x-2)^2}\right)dx$ (forme $\dfrac{-u'}{u^2}$ primitive: $\dfrac{1}{u}$)

$I=-2\left[\dfrac{1}{x-2}\right]_3^4=-2\left[\dfrac{1}{2}-1\right]=-2\times\dfrac{-1}{2}=1$

La fonction f est une fonction de densité d'une loi de probabilité sur $[3\ ;\ 4]$

2) On a: $P\left(3,2\leqslant X\leqslant 3,5\right)=\displaystyle\int_{3,2}^{3,5}\left(\frac{2}{(x-2)^2}\right)dx=-2\int_{3,2}^{3,5}\left(\frac{-1}{(x-2)^2}\right)dx$

$P\left(3,2\leqslant X\leqslant 3,5\right)=-2\left[\dfrac{1}{x-2}\right]_{3,2}^{3,5}=-2\left[\dfrac{1}{1,5}-\dfrac{1}{1,2}\right]=\dfrac{1}{3}$

L'annonce est exacte.

3)a) $G(x)=\ln(x-2)-\dfrac{x}{x-2}$, la fonction G est dérivable sur $[3\ ;\ 4]$ ($x-2>0$ et $x-2\neq 0$)

$G'(x)=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1\times(x-2)-x\times 1}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{-2}{(x-2)^2}=\dfrac{(x-2)+2}{(x-2)^2}=\dfrac{x}{(x-2)^2}=g(x)$

La fonction G est une primitive de la fonction g sur $[3\ ;\ 4]$

3)b) $E(X)=\int_3^4 x\times f(x)\ dx=\displaystyle\int_3^4\left(\frac{2x}{(x-2)^2}\right)dx=2\int_3^4\frac{x}{(x-2)^2}\ dx=2\int_3^4 g(x)\ dx$

$E(X)=2\left[G(x)\right]_3^4=2\left[G(4)-G(3)\right]=2\left(\ln(2)-\dfrac{4}{2}\right)-2\left(\ln(1)-\dfrac{3}{1}\right)=2\ln(2)-4+6$

$E(X)=2\ln(2)+2\approx 3,39$

En moyenne la masse du panier déposé par les clients en environ égale à $3,39\ kg$.

Exercice 4:

1)a) $z^3+\left(-2\sqrt{3}+2i\right)z^2+\left(4-4i\sqrt{3}\right)z+8i=0$ (E)

$(-2i)^3+\left(-2\sqrt{3}+2i\right)(-2i)^2+\left(4-4i\sqrt{3}\right)(-2i)+8i=8i-4\left(-2\sqrt{3}+2i\right)-2i\left(4-4i\sqrt{3}\right)+8i$

$(-2i)^3+\left(-2\sqrt{3}+2i\right)(-2i)^2+\left(4-4i\sqrt{3}\right)(-2i)+8i=8i+8\sqrt{3}-8i-8i-8\sqrt{3}+8i=0$

$(-2i)$ est solution de l'équation (E)

1)b) $(z+2i)\left(z^2-2\sqrt{3}\ z+4\right)=z^3-2z^2\sqrt{3}+4z+2iz^2-4iz\sqrt{3}+8i=z^3+\left(-2\sqrt{3}+2i\right)+\left(4-4i\sqrt{3}\right)z+8i$

1)c) Un produit de facteur est nul si l'un de ses facteurs est nul:

$\begin{cases}z+2i=0\\ z^2-2\sqrt{3}\ z+4=0\end{cases}$

soit l'équation: $z^2-2\sqrt{3}\ z+4=0$

$\Delta = b^2 - 4\,a\,c = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 - 4\times 4 = 12 - 16 = -4 = 4\,i^2$

$z_1 = \dfrac{2\sqrt{3} - 2\,i}{2}$ et $z_2 = \dfrac{2\sqrt{3} + 2\,i}{2}$

$z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$

Les solutions de l'équation $(\mathbf{E})$ sont: $(-2\,i)$, $\sqrt{3} - i$ et $\sqrt{3} + i$

1)d) Solutions de $(\mathbf{E})$ sous forme exponentielle:

$z = -2\,i = 2\,e^{-i\frac{\pi}{2}}$ on utilise le fait que: $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 + 1\,i$ et $e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\dfrac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{-\pi}{2}\right) = 0 - 1\,i$

$z_1 = \sqrt{3} - i$ avec $\begin{cases} |z_1| = \sqrt{4} = 2 \\ \begin{cases} \cos\,\theta_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\,\theta_1 = \dfrac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta_1 = \dfrac{-\pi}{6} \end{cases}$ donc $z_1 = 2\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$z_2 = \sqrt{3} + i$ avec $\begin{cases} |z_2| = \sqrt{4} = 2 \\ \begin{cases} \cos\,\theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\,\theta_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta_2 = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$ donc $z_2 = 2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$

2)a) $z_A = -2\,i$ soit $\mathbf{A}\ (0\,;\,-2)$; $z_B = \sqrt{3} + i$ soit $\mathbf{B}\left(\sqrt{3}\ ;1\right)$ et $z_C = \sqrt{3} - i$ soit $\mathbf{C}\left(\sqrt{3}\ ;-1\right)$

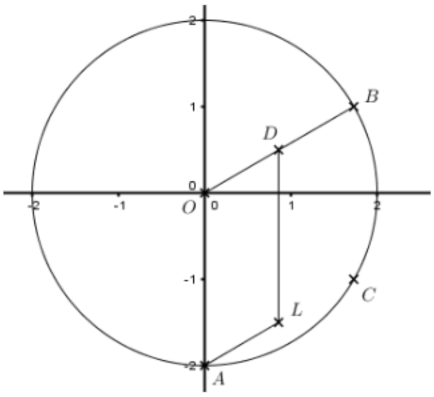
$\mathbf{OA} = \sqrt{\left(x_A - x_0\right)^2 + \left(y_A - y_0\right)^2} = \sqrt{4} = 2$

$\mathbf{OB} = \sqrt{\left(x_B - x_0\right)^2 + \left(y_B - y_0\right)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$\mathbf{OC} = \sqrt{\left(x_C - x_0\right)^2 + \left(y_C - y_0\right)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

Les points $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ appartiennent au cercle de centre $\mathbf{O}$ et de rayon $\mathbf{R} = 2$

2)b) Figure:



2)c) $\mathbf{D}$ milieu de $[\mathbf{OB}]$ donc $z_D = \dfrac{z_B - z_0}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i$

$\mathbf{AODL}$ parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{AO}} = \overrightarrow{\mathbf{LD}}$

$z_{\overrightarrow{AO}} = z_O - z_A = 2\,i$ et $z_{\overrightarrow{LD}} = z_D - z_L = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i - z_L$

$z_{\overrightarrow{OA}} = z_{\overrightarrow{LD}} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i - z_L = 2\,i \Leftrightarrow z_L = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i - 2\,i$

donc $z_L = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}\,i$

3)a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixes respectives $z = x + i\,y$ et $z' = x' + i\,y'$

$z \cdot \overline{z'} = (x + i\,y)\,(x' - i\,y') = x\,x' + y\,y' + i\,(x'\,y - x\,y')$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $x\,x' + y\,y' = 0 \Leftrightarrow Re\left(z \cdot \overline{z'}\right)$ donc $z \cdot \overline{z'}$ est un imaginaire pur

3)b) $\mathbf{AOL}$ triangle rectangle en $\mathbf{L}$:

$\overrightarrow{\mathbf{OL}}$ a pour affixe: $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}\,i$

$\overrightarrow{\mathbf{AL}}$ a pour affixe: $z' = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}\,i + 2\,i = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i$

En utilisant la question 3)a)

$z \cdot \overline{z'} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}\,i\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\,i\right) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\,i - \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\,i - \dfrac{3}{4} = -i\sqrt{3}$

Or $-i\sqrt{3} \in i\,\mathbf{R}$ (imaginaire pur)

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{OL}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{AL}}$ sont orthogonaux

Le triangle $\mathbf{AOL}$ est un triangle rectangle en $\mathbf{L}$