Correction: Polynésie 19 Juin 2019

Exercice 1:

1)a) La variable aléatoire $\mathbf{X}$ suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$

La durée moyenne de fonctionnement sans panne est de 10 mois: $\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \frac{1}{\lambda} = 10 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{10} = 0,1$

1)b) $\mathbf{P}(\mathbf{X} \geqslant 6) \approx 0,55$

La probabilité que le distributeur de glaces à l'italienne n'ait connu aucune panne
pendant les six premiers mois est égale à $0,55$

1)c) $\mathbf{P}_{\mathbf{X}\geqslant 6}(\mathbf{X} \geqslant 12) = \mathbf{P}_{\mathbf{X}\geqslant 6}(\mathbf{X} \geqslant 6+6) = \mathbf{P}(\mathbf{X} \geqslant 6)$

Donc $\mathbf{P}_{\mathbf{X}\geqslant 6}(\mathbf{X} \geqslant 12) \approx 0,55$

Le distributeur n'a connu aucune panne pendant les six premiers mois, la probabilité qu'il n'en connaisse aucune jusqu'à la fin de la première année est égale à $0,55$ (loi de durée de vie sans vieillissement)

1)d) $\mathbf{P}(\mathbf{X} > t) = 0,05 \Leftrightarrow e^{-0,1t} = 0,05 \Leftrightarrow -0,1\,t = \ln(0,05) \Leftrightarrow t = \frac{-\ln(0,05)}{0,1}$

d'où $t \approx 29,9$ soit $t = 30$ (arrondi à l'entier)

Le distributeur sera remplacé dans 30 mois

2)a) La variable aléatoire $\mathbf{M}$ suit une loi normale d'espérance $\mu = 60$ et d'écart type $\sigma = 2,5$

A la calculatrice, on a: $\mathbf{P}(55 \leqslant \mathbf{M} \leqslant 65) \approx 0,95$

2)b) $\mathbf{P}(\mathbf{M} \geqslant m) \geqslant 0,99 \Leftrightarrow \mathbf{P}(\mathbf{M} \leqslant m) \leqslant 0,01$

A la calculatrice, on trouve $m \approx 54$ (arrondi au gramme près)

3) On sait que: deux acheteurs de glace à la vanille pour un acheteur de glace à la fraise

$p = \frac{2}{3}$ et $n = 120 \geqslant 30$; $n \times p = 120 \times \frac{2}{3} = 80 \geqslant 5$ et $n \times (1-p) = 120 \times \frac{1}{3} = 40 \geqslant 5$

Les condions sont vérifiées

Intervalle de fluctuation au seuil de $95\ \%$: $\mathbf{I} = \left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p \times (1-p)}{n}} \ ; p + 1,96 \sqrt{\frac{p \times (1-p)}{n}} \right]$

$$\mathbf{I} = \left[\frac{2}{3} - 1,96 \times \sqrt{\frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}}{120}} \ ; \ \frac{2}{3} + 1,96 \times \sqrt{\frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}}{120}} \right]$$

D'où $\mathbf{I} \approx [0,58 \ ; 0,75]$

Calculons la fréquence observée: $f_{obs} = \frac{65}{120} \approx 0,54$

On constate que $f_{obs} \notin \mathbf{I}$, ce qui sgnifie qu'on peut remettre son hypothèse en question

Exercice 2:

Partie A:

1) Si fonction polynomiale de degré 2, alors elle s'écrit sous la forme: $\mathbf{f}(x) = a x^2 + b x + c$ où $a\,(a \neq 0)$, b et c sont des réels

$\lim\limits_{\substack{x>0 \\ x \to 0}} \mathbf{f}(x) = c \neq -\infty$ donc contradictoire avec la troisième condition

2)a) Soit g la fonction définie sur $]0 \ ; 1]$ par: $\mathbf{g}(x) = k \times \ln(x)$

La fonction g est dérivable sur cet intervalle et on a : $\mathbf{g}'(x) = k \times \frac{1}{x}$

De plus $\mathbf{g}'(1) = 0,25 \Leftrightarrow k \times \frac{1}{1} = 0,25 \Leftrightarrow k = 0,25$

Donc $\mathbf{g}(x) = 0,25 \ln(x)$ avec $\begin{cases} \mathbf{g}(1) = 0 \\ \mathbf{g}'(1) = 0,25 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = -\infty \end{cases}$ conditions réunies

2)b) $\mathbf{g}(0,25) \approx -0,34 > -5,5$ et par lecture graphique $\mathbf{f}(0,25) < -5,5$

Donc la courbe représentative de la fonction g ne coïncide pas avec la courbe $\mathbf{C}$

3) Soit h la fonction définie sur $]0 \ ; 1]$ par: $h(x) = \frac{a}{x^4} + b\,x$

$$\mathbf{h}'(x) = a \times \left(\frac{-4x^3}{x^8} \right) + b = \frac{-4a}{x^5} + b$$

$\mathbf{h}(1) = 0 \Leftrightarrow a + b = 0 \Leftrightarrow b = -a$

$\mathbf{h}'(1) = 0,25 \Leftrightarrow -4a + b = 0,25 \Leftrightarrow -5a = 0,25 \Leftrightarrow a = -0,05$

D'où $a = -0,05$ et $b = 0,05$, $\mathbf{h}(x) = \frac{-0,05}{x^4} + 0,05\,x$ et $\lim\limits_{\substack{x>0 \\ x \to 0}} h(x) = -\infty$ (car $\lim\limits_{\substack{x>0 \\ x \to 0}} -\frac{0,05}{x^4} = -\infty$)

Partie B:

1)La fonction f est définie et dérivable sur $]0 \ ; 1]$:

$\mathbf{f}(x) = \frac{1}{20}\left(x - \frac{1}{x^4}\right)$ et $\mathbf{f}'(x) = \frac{1}{20}\left(1 - \frac{-4x^3}{x^8}\right) = \frac{1}{20}\left(1 + \frac{4}{x^5}\right)$ donc $\mathbf{f}'(x) > 0$, par conséquent f est croissante sur $]0 \ ; 1]$

x	0	1
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\|-\infty \nearrow$	$f(1)=0$

avec $\begin{cases} f(1) = \dfrac{1}{20}(1-1) = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x>0 \\ x \to 0}} f(x) = -\infty \end{cases}$

La fonction f est continue et croissante sur $]0\,;1]$

Comme $-5 \in]-\infty\,;0]$, l'équation $f(x) = -5$ admet une unique solution $\alpha \in]0\,;1]$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

A la calculatrice, on obtient: $f(0{,}31) \approx -5{,}39 < -5$ et $f(0{,}32) \approx -4{,}75 > -5$, soit $0{,}31 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}32$

Donc une valeur approchée: $\alpha \approx 0{,}31$ (à $0{,}01$ près)

2)a) Sur $]0\,;1]$, $u(x) = \dfrac{1}{2x^2}$

La fonction u est dérivable sur cet intervalle: $u'(x) = -\dfrac{4x}{4x^4} = \dfrac{-1}{x^3}$ (forme $\dfrac{1}{u}$ dérivée $\dfrac{-u'}{u^2}$)

2)b) $V = \displaystyle\int_\alpha^1 \pi x^2 f'(x)\,dx = \pi\,\frac{1}{20}\int_\alpha^1 x^2\left(1+\frac{4x^3}{x^8}\right)dx = \frac{\pi}{20}\int_\alpha^1\left(x^2+4\times\frac{1}{x^3}\right)dx$

$$V = \frac{\pi}{20}\left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_\alpha^1 - 4\left[\frac{1}{2x^2}\right]_\alpha^1\right) = \frac{\pi}{20}\left(\frac{1}{3}-\frac{\alpha^3}{3}-4\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{2\alpha^2}\right)$$

$$V = \frac{\pi}{20}\left(\frac{-5}{3}-\frac{\alpha^3}{3}+\frac{2}{\alpha^2}\right)$$

$V \approx 3{,}01\ cm^3$

Exercice 3:

1) $x \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, $1-x \geqslant 0$

$$I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\,dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{1-x}\,dx = -\left[\ln(1-x)\right]_0^{\frac{1}{2}}$$ (forme $\dfrac{u'}{u}$ primitive $\ln(u)$)

$$I_0 = -\left[\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)-\ln(1-0)\right] = -\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln(1) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$$ (car $ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$, $a>0$)

2)a) $I_1 - I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1-x}\,dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{1-x}-\frac{1}{1-x}\right)dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-1}{1-x}\right)dx = \int_0^{\frac{1}{2}}(-1)\,dx$

$I_1 - I_0 = [-x]_0^{\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{2}$

2)b) $I_1 - I_0 = \dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow I_1 = I_0 - \dfrac{1}{2} = \ln(2) - \dfrac{1}{2}$

3)a) $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}}{1-x}\,dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^{n+1}}{1-x}-\frac{x^n}{1-x}\right)dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^n(x-1)}{1-x}\right)dx$

$$I_{n+1} - I_n = -\int_0^{\frac{1}{2}} x^n\,dx = -\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{-1}{n+1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Donc on obtient:

$$I_n - I_{n+1} = \frac{1}{n+1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$$

3)b) Algorithme:

Grâce à la question précédente, on peut écrire: $I_{n+1} = I_n - \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$

$I_{K+1} = I_K - \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{K+1}}{K+1}$ si $K=0$, $I_{0+1} = I_1 = I_0 - \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{0+1}}{0+1} = I_0 - \dfrac{1}{2} = \ln(2) - \dfrac{1}{2}$

si $K = N-1$, $I_{N-1+1} = I_N = I_{N-1} - \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1+1}}{N-1+1} = I_{N-1} - \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{N}}{N}$

Variables:	K entier et I réel
Initialisation:	K prend la valeur 0
	I prend la valeur $ln(2)$
Traitement:	Pour K allant de 0 à N-1
	I prend la valeur $\mathrm{I}-\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{K}+1}}{\mathrm{K}+1}$
	Fin Pour
Sortie:	Afficher I

4)a) On admet que si $x\in\left[0\ ;\ \frac{1}{2}\right]$ alors $0\leqslant\frac{x^n}{1-x}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}$

En intégrant cette relation, on obtient:

$$0\leqslant\frac{x^n}{1-x}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}\ \Leftrightarrow\ 0\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}\,dx\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2^{n-1}}\,dx\ \Leftrightarrow\ 0\leqslant\mathrm{I}_n\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}\int_0^{\frac{1}{2}}1\,dx$$

$$0\leqslant\mathrm{I}_n\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}\,[x]_0^{\frac{1}{2}}\ \Leftrightarrow\ 0\leqslant\mathrm{I}_n\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}\times\left(\frac{1}{2}-0\right)\ \Leftrightarrow\ 0\leqslant\mathrm{I}_n\leqslant\frac{1}{2^n}$$

4)b) $0\leqslant\mathrm{I}_n\leqslant\frac{1}{2^n}\ \Leftrightarrow\ 0\leqslant\mathrm{I}_n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=\mathrm{O}$ avec $0<q=\frac{1}{2}<1$

Donc, d'après le théorème d'encadrement (gendarmes), $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{I}_n=0$

5)a) On pose $\mathrm{S}_n=\frac{1}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}+\cdots+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1}{1}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}+\cdots+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$

Par récurrence, on montre que: $\mathrm{S}_n=\mathrm{I}_0-\mathrm{I}_n$

Initialisation: $n=1$, $\mathrm{I}_0-\mathrm{I}_1=\frac{1}{2}$ et $\mathrm{S}_1=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$

La propriété est vraie au rang $n=1$

Hérédité: on suppose que la propriété est vraie au rang n : $\mathrm{S}_n=\mathrm{I}_0-\mathrm{I}_n$

Et on doit montrer qu'elle est vraie au rang n+1: $\mathrm{S}_{n+1}=\mathrm{I}_0-\mathrm{I}_{n+1}$

$$\mathrm{S}_{n+1}-\mathrm{S}_n=\frac{1}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}+\cdots+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}-\left(\frac{1}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}+\cdots+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}\right)$$

$\mathrm{S}_{n+1}-\mathrm{S}_n=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}\ \Leftrightarrow\ \mathrm{S}_{n+1}=\mathrm{S}_n+\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}=\mathrm{I}_0-\mathrm{I}_n+\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$ (hypothèse de récurrence)

$\mathrm{S}_{n+1}=\mathrm{I}_0-\left(\mathrm{I}_n-\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}\right)=\mathrm{I}_0-\mathrm{I}_{n+1}$ car $\mathrm{I}_n-\mathrm{I}_{n+1}=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}\ \Leftrightarrow\ \mathrm{I}_{n+1}=\mathrm{I}_n-\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$

La propriété est vraie au rang n+1

Conclusion: Pour tout $n\geqslant1$, $\mathrm{S}_n=\mathrm{I}_0-\mathrm{I}_n$

5)b) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{I}_n=0$ et que $\mathrm{I}_0=\ln(2)$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{S}_n=\mathrm{I}_0=\ln(2)$

Exercice 4:

1) $\overrightarrow{\mathrm{EB}}\,(12\ ;0\ ;-6)$ et $\overrightarrow{\mathrm{ED}}\,(0\ ;18\ ;-6)$

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{EB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{ED}}$ ne sont pas colinéaires, ils définissent un plan

Soit $\vec{n}$ un vecteur normal de ce plan, $\vec{n}\,(a\ ;b\ ;c)$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EB}}=12\,a-6\,c=0$ soit $a=\frac{1}{2}\,c$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ED}}=18\,b-6\,c=0$ soit $b=\frac{1}{3}\,c$

On choisit $c=6$, le vecteur $\vec{n}$ a pour coordonnées: $\vec{n}\left(\frac{6}{2}\ ;\ \frac{6}{3}\ ;6\right)$ soit $\vec{n}\,(3\ ;2\ ;6)$

Le plan (EBD) a pour équation cartésienne: $a\,x+b\,y+c\,z+d=0$

Soit $3\,x+2\,y+6\,z+d=0$

Le point E appartient à ce plan : $3\,x_{\mathrm{E}}+2\,y_{\mathrm{E}}+6\,z_{\mathrm{E}}+d=0\ \Leftrightarrow\ 0+0+36+d=0\ \Leftrightarrow\ d=-36$

Une équation cartésiene du plan (EBD) est: $3\,x+2\,y+6\,z-36=0$

2)a) $\mathbf{A}\,(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$ et $\mathbf{G}\,(12\ ;\ 18\ ;\ 6)$, un vecteur directeur de la droite $(\mathbf{A}\ \mathbf{G})$ est: $\overrightarrow{\mathbf{A}\ \mathbf{G}}\,(12\ ;\ 18\ ;\ 6)$

Représentation paramétrique de $(\mathbf{A}\ \mathbf{G})$: $\begin{cases} x = x_{\mathrm{A}} + 12\ k \\ y = y_{\mathrm{A}} + 18\ k \\ z = z_{\mathrm{A}} + 6\ k \end{cases}$, $k \in \mathbf{R}$ soit $\begin{cases} x = 12\ k \\ y = 18\ k \\ z = 6\ k \end{cases}$, $k \in \mathbf{R}$

2)b) La droite $(\mathbf{A}\ \mathbf{G})$ coupe le plan $(\mathbf{E}\ \mathbf{B}\ \mathbf{D})$

$$\begin{cases} x = 12\ k \\ y = 18\ k \\ z = 6\ k \\ 3\,x + 2\,y + 6\,z - 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12\ k \\ y = 18\ k \\ z = 6\ k \\ 36\ k + 36\ k + 36\ k - 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12\ k \\ y = 18\ k \\ z = 6\ k \\ 108\ k - 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12\ k \\ y = 18\ k \\ z = 6\ k \\ k = \dfrac{36}{108} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \\ z = 2 \\ k = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

La droite $(\mathbf{A}\ \mathbf{G})$ coupe le plan $(\mathbf{E}\ \mathbf{B}\ \mathbf{D})$ en un point $\mathbf{K}$ de coordonnées: $\mathbf{K}\,(4\ ;\ 6\ ;\ 2)$

3) $\overrightarrow{\mathbf{A}\ \mathbf{G}}\,(12\ ;\ 18\ ;\ 6)$ et $\vec{n}\,(3\ ;\ 2\ ;\ 6)$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathbf{A}\ \mathbf{G}} = 36 + 36 + 36 = 108 \neq 0$

La droite $(\mathbf{A}\ \mathbf{G})$ n'est pas orthogonale au plan $(\mathbf{E}\ \mathbf{B}\ \mathbf{D})$

4)a) $\mathbf{B}$, $\mathbf{K}$ et $\mathbf{M}$ alignés:

$\mathbf{B}\,(12\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $\mathbf{M}\,(0\ ;\ 9\ ;\ 3)$ et $\mathbf{K}\,(4\ ;\ 6\ ;\ 2)$

$\overrightarrow{\mathbf{B}\ \mathbf{M}}\,(-12\ ;\ 9\ ;\ 3)$ et $\overrightarrow{\mathbf{B}\ \mathbf{K}}\,(-8\ ;\ 6\ ;\ 2)$

Les coordonnées sont proportionnelles: $-12 = -8\ k$ soit $k = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$

$9 = 6\ k$ soit $k = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2}$

$3 = 2\ k$ soit $k = \dfrac{3}{2}$

Donc $\overrightarrow{\mathbf{B}\ \mathbf{M}} = \dfrac{3}{2}\ \overrightarrow{\mathbf{B}\ \mathbf{K}}$

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{B}\ \mathbf{M}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{B}\ \mathbf{K}}$ sont colinéaires, les points $\mathbf{B}$, $\mathbf{M}$ et $\mathbf{K}$ sont alignés

4)b) Le point $\mathbf{K}$ est donc le point d'intersection des droites $(\mathbf{A}\ \mathbf{G})$ et $(\mathbf{B}\ \mathbf{M})$

Voir figure ci-dessous

5)a) Les plans $(\mathbf{A}\ \mathbf{E}\ \mathbf{D})$ et $(\mathbf{E}\ \mathbf{B}\ \mathbf{D})$ se coupent selon la droite $(\mathbf{E}\ \mathbf{D})$

Le plan $\mathbf{P}$ est parallèle au plan $(\mathbf{A}\ \mathbf{E}\ \mathbf{D})$ et passe par le point $\mathbf{K}$

Le point $\mathbf{K}$ appartient donc aux plans $(\mathbf{E}\ \mathbf{B}\ \mathbf{D})$ et $\mathbf{P}$

Donc l'intersection du plan $\mathbf{P}$ et du plan $(\mathbf{E}\ \mathbf{B}\ \mathbf{D})$ est une droite parallèle à la droite $(\mathbf{E}\ \mathbf{D})$ passant par le point $\mathbf{K}$

5)b) Figure: