Correction: Asie 20 Juin 2019

Exercice 1:

1) La variable aléatoire $\mathbf{X}$ suit une loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=0,4$

A la calculatrice, on a $\mathbf{P}\left(x \leqslant 4\right) \approx 0,05$ (arrondi au centième)

Réponse c

2) $\left(e^{x}\right)^{2}=3\,e^{x} \Leftrightarrow e^{2x}-3\,e^{x}=0 \Leftrightarrow e^{x}\times\left(e^{x}-3\right)=0$

$\begin{cases} e^{x}>0 \\ e^{x}-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x}>0 \\ e^{x}=3=e^{\ln(3)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x}>0 \\ x=\ln\,(3) \end{cases}$

Réponse b

3) La fonction f est définie sur $\mathbf{R}$ par: $\mathbf{f}\,(x)=\dfrac{x}{e^{x}}$

$\mathbf{f}\,(x)=\dfrac{x}{e^{x}}=x\times e^{-x}$ (car $\dfrac{1}{e^{x}}=e^{-x}$)

Réponse d

4) La variable aléatoire $\mathbf{X}$ suit une loi normale, on donne $\mathbf{P}\left(\mathbf{X}\geqslant a\right)=0,1$

D'après le graphique l'espérance $\mu=200$ et on sait que $\mathbf{P}\left(\mu-2\,\sigma\leqslant\mathbf{X}\leqslant\mu+2\,\sigma\right)=0,95$

Donc $\mu-2\,\sigma=170 \Leftrightarrow \sigma=\dfrac{170-200}{-2}=\dfrac{30}{2}=15$

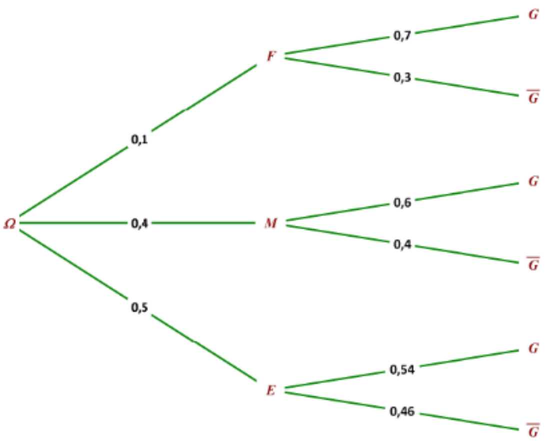
A la calculatrice, on a: $\mathbf{P}\left(\mathbf{X}\geqslant a\right)=0,1$, $\mathbf{P}\left(\mathbf{X}\leqslant a\right)=0,9$ d'où $a\approx 219,2$

Réponse c

Exercice 2:

Partie A:

1) Arbre pondéré:



2) On calcule: $\mathbf{P}\,(\mathbf{M}\cap\mathbf{G})=?$

$\mathbf{P}\,(\mathbf{M}\cap\mathbf{G})=\mathbf{P}\,(\mathbf{M})\times\mathbf{P}_{\mathbf{M}}\,(\mathbf{G})=0,4\times 0,6=0,24$

3)a) Probabilités totales:

$\mathbf{P}\,(\mathbf{G})=\mathbf{P}\,(\mathbf{M}\cap\mathbf{G})+\mathbf{P}\,(\mathbf{F}\cap\mathbf{G})+\mathbf{P}\,(\mathbf{E}\cap\mathbf{G})$

On sait que $\mathbf{P}\,(\mathbf{G})=0,58$

$0,58=0,24+\mathbf{P}\,(\mathbf{F}\cap\mathbf{G})+0,27 \Leftrightarrow \mathbf{P}\,(\mathbf{F}\cap\mathbf{G})=0,58-0,24-0,27=0,07$

3)b) $\mathbf{P}_{\mathbf{F}}\,(\mathbf{G})=\dfrac{\mathbf{P}\,(\mathbf{F}\cap\mathbf{G})}{\mathbf{P}\,(\mathbf{F})}=\dfrac{0,07}{0,1}$

$\mathbf{P}_{\mathbf{F}}\,(\mathbf{G})=0,7$

3)c) On constate que: $\mathbf{P}_{\mathbf{F}}\,(\mathbf{G})=0,7>0,47$

Il semblerait que la présence de Claire soit positive pour l'équipe féminine

4) On calcule: $\mathbf{P}_{\mathbf{G}}\,(\mathbf{F})=\dfrac{\mathbf{P}\,(\mathbf{F}\cap\mathbf{G})}{\mathbf{P}\,(\mathbf{G})}=\dfrac{0,07}{0,58}$

$\mathbf{P}_{\mathbf{G}}\,(\mathbf{F})\approx 0,12$

Claire annonce avoir assisté à la victoire d'une équipe du club.

La probabilité qu'elle ait suivi le match d'une équipe adulte féminine est égale à $0,12$

Partie B:

1) La variable aléatoire $\mathbf{X}$ associe le temps d'attente exprimé en minute.

$\mathbf{X}$ suit une loi normale d'espérance $\mu=30$ et d'écart type $\sigma=10$

En moyenne le supporter attend 30 minutes au guichet

2) A la calculatrice, on a:

$\mathbf{P}\left(25\leqslant\mathbf{X}\leqslant 35\right)\approx 0,38$

La probabilité que le supporter attende entre 25 minutes et 35 minutes est égale à $0,38$

2))c) $\mathbf{P}\left(\mathbf{X}\leqslant 15\right)\approx 0,07$

La probabilité que le supporter attende moins d'un quart d'heure est égale à $0,07$

Partie C:

1) On sait que $p=0,6$ et $n=75\geqslant 30$; $n\times p=75\times 0,60=45\geqslant 5$ et $n\times(1-p)=75\times 0,40=30\geqslant 5$

Les condions sont vérifiées

Intervalle de fluctuation au seuil de $95~\%$: $\mathbf{I}=\left[\ p-1{,}96\times\sqrt{\dfrac{p\times(1-p)}{n}}\ ;\ p+1{,}96\sqrt{\dfrac{p\times(1-p)}{n}}\ \right]$

$\mathbf{I}=\left[\ 0{,}60-1{,}96\times\sqrt{\dfrac{0{,}60\times 0{,}40}{75}}\ ;\ 0{,}60+1{,}96\times\sqrt{\dfrac{0{,}60\times 0{,}40}{75}}\ \right]$

D'où $\mathbf{I}\approx[\,0{,}48\ ;\ 0{,}71\,]$

2) Calculons la fréquence observée: $f_{obs}=\dfrac{52}{75}\approx 0{,}69$

On constate que $f_{obs}\in\mathbf{I}$, ce qui sgnifie que la victoire de l'équipe de France n'a pas eu d'incidence sur les réinscriptions.

Exercice 3:

Partie A:

1) Au 1^{er} septembre 2018, il y avait 230 tonnes d'algues sur ces plages: $u_0=230$

Le 1^{er} septembre 2018+n, la quantité en tonnes d'algues est notée u_n

Tous les ans Richard prélève $8{,}5$ tonnes d'algues : $u_n-8{,}5$

Tous les ans la quantité d'algues augmente de $4~\%$: $\left(1+\dfrac{4}{100}\right)\left(u_n-8{,}5\right)=1{,}04\left(u_n-8{,}5\right)=1{,}04\ u_n-8{,}84$

Donc le 1^{er} septembre 2019, on a: $u_1=1{,}04\left(u_0-8{,}5\right)=1{,}04\times 221{,}5=230{,}36$

2)a) $v_n=u_n-221$

$v_{n+1}=u_{n+1}-221=\left(1{,}04\ u_n-8{,}84\right)-221=1{,}04\ u_n-229{,}84$

$v_{n+1}=1{,}04\left(u_n-\dfrac{229{,}84}{1{,}04}\right)=1{,}04\left(u_n-221\right)$

$v_{n+1}=1{,}04\ v_n$

La suite $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique de raison $q=1{,}04$ et de premier terme $v_0=u_0-221=230-221=9$

2)b) $v_n=v_0\times q^n=9\times 1{,}04^n$

2)c) $u_n=v_n+221$

donc $u_n=221+9\times 1{,}04^n$

3) $u_n\geqslant 250\ \Leftrightarrow\ 221+9\times 1{,}04^n\geqslant 250\ \Leftrightarrow\ 1{,}04^n\geqslant\dfrac{250-221}{9}=\dfrac{29}{9}$

La fonction "ln" est croissante sur $]\,0\ ;+\infty\,[$

$\ln\left(1{,}04^n\right)\geqslant\ln\left(\dfrac{29}{9}\right)\ \Leftrightarrow\ n\ln(1{,}04)\geqslant\ln\left(\dfrac{29}{9}\right)\ \Leftrightarrow\ n\geqslant\dfrac{\ln\left(\dfrac{29}{9}\right)}{\ln(1{,}04)}$ car $1{,}04\geqslant 1\ \Leftrightarrow\ \ln(1{,}04)\ \ln(1)=0$

$\dfrac{\ln\left(\dfrac{29}{9}\right)}{\ln(1{,}04)}\approx 29{,}8$ donc $n\geqslant 30$

Au bout de 30 ans, la quantité d'algues dépassera 250 tonnes.

Partie B:

1) La variable $\mathbf{A}$ contient la valeur 230 , ce qui correspond à la quantité d'algues sur ces plages le 1^{er} septembre 2018

La variable $\mathbf{B}$ contient la valeur $8{,}5$, ce qui correspond à la quantité d'algues prélevée par richard sur les plages de sa commune au mois de septembre 2018

2) Tableau:

K	A	B
	230	8,5
1	230,36	9,35
2	229,85	10,29

$1{,}10\times 8{,}5=9{,}35$ et $1{,}04\,(230{,}36-9{,}35)=229{,}85$

3) En 2034, soit 2018+16, la quantité d'algues à prélever ne sera pas suffisante $\left(29{,}75\leqslant 39{,}06\right)$

Exercice 4:

1)a) Lecture graphique: $\mathbf{f}'(1)=0$ car tangente horizontale

1)b) Lecture graphique: le point $\mathbf{B}$ semble être le seul point d'inflexion

1)c) Lecture graphique:

$4\leqslant\int_6^8 \mathbf{f}(x)\ dx\leqslant 5$ (aire comprise entre la courbe $\mathbf{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=6$ et $x=8$)

2)a) La fonction f définie sur $[\,0{,}5\ ;\ 12\,]$ par: $\mathbf{f}(x)=\ln(x)+\dfrac{1}{x}$

f est dérivable et $\mathbf{f}'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$

2)b) Le signe de $\mathbf{f}'(x)$ dépend du signe du dénominateur, soit $(x-1)$

x	0,5 1 12
$x-1$	$-$ 0 $+$

Tableau de variations:

x	$0{,}5$		1		12
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0{,}5)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(12)$

avec $\begin{cases} f(0{,}5) = 2 - \ln(2) \approx 1{,}3 \\ f(1) = 1 \\ f(12) = \ln(12) + \dfrac{1}{12} \approx 2{,}6 \end{cases}$

3) D'après le logiciel: $f''(x) = \dfrac{2-x}{x^3}$

Le signe de $f''(x)$ dépend du signe de : $(2-x)$

x	$0{,}5$	2	12
$2-x$	$+$	0	$-$

D'où le tableau suivant:

x	$0{,}5$		2		12
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		convexe	|	concave	

4)a) La fonction $\mathbf{F}$ est définie sur $[0{,}5\ ;\ 12]$ par: $F(x) = (x+1)\ \ln(x) - x$

Calculons $F'(x) = ?$

$$F'(x) = 1 \times \ln(x) + (x+1) \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + \frac{x+1}{x} - 1 = \ln(x) + \frac{x+1}{x} - \frac{x}{x}$$

$$F'(x) = \ln(x) + \frac{x+1-x}{x} = \ln(x) + \frac{1}{x} = f(x)$$

Donc la fonction $\mathbf{F}$ est une primitive de f sur $[0{,}5\ ;\ 12]$

4)b) Valeur moyenne de la fonction f :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{8-6}\int_6^8 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[F(x)\right]_6^8$$

$$m = \frac{1}{2}\left[F(8) - F(6)\right] \text{ avec } \begin{cases} F(6) = 7\ln(6) - 6 \\ F(8) = 9\ln(8) - 8 \end{cases}$$

$$m = \frac{1}{2}\left[9\ln(8) - 8 - 7\ln(6) + 6\right] = \frac{1}{2}\left[20\ln(2) - 7\ln(3) - 2\right] \text{ d'où } m \approx 2{,}09$$