Correction: Antilles-Guyane 18 Juin 2019

Exercice 1:

Partie A:

1) Soient a et b des nombres réels.

La fonction f est définie sur $[0\ ;+\infty[$ par: $f(x)=\dfrac{a}{1+e^{-bx}}$

La courbe passe par le point $A\ (0\ ;0{,}5)$: $f(0)=0{,}5 \Leftrightarrow \dfrac{a}{1+e^{0}}=\dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a=1$

2) La fonction f est dérivable sur $[0\ ;+\infty[$

(forme $\dfrac{1}{u}$ dérivée $\dfrac{-u'}{u^2}$)

$$f(x)=\frac{a}{1+e^{-bx}}=a\times\left(\frac{1}{1+e^{-bx}}\right) \qquad \begin{cases} u(x)=1+e^{-bx} \\ u'(x)=-b\,e^{-bx} \end{cases}$$

$$f'(x)=a\times\left(\frac{-\left(-b\,e^{-bx}\right)}{\left(1+e^{-bx}\right)^2}\right)=\frac{a\,b\,e^{-bx}}{\left(1+e^{-bx}\right)^2}$$

Comme $a=1$ on a: $f'(x)=\dfrac{b\,e^{-bx}}{\left(1+e^{-bx}\right)^2}$

3) La tangente à la courbe au point d'abscisse $x_0=0$ est la droite $(A\,B)$ d'équation $y=mx+p$

La droite $(A\,B)$ a pour coefficient directeur: $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{1-0{,}5}{10-0}=\dfrac{0{,}5}{10}=\dfrac{1}{20}=0{,}05$

Le coefficient directeur de la tangente est: $f'(0)=\dfrac{-b}{4}=0{,}05$ donc $b=4\times 0{,}05 \Leftrightarrow b=0{,}2$

Conclusion: Pour tout $x\in[0\ ;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-0{,}2x}}$

Partie B:

1) Au 1^{er} Janvier 2010, on a $x=10$

$$p(10)=\frac{1}{1+e^{-2}}\approx 0{,}88$$

Donc **88 %** des individus sont équipés au 1^{er} Janvier 2010

2)a) La fonction p est dérivable sur $[0\ ;+\infty[$

$$p'(x)=-\frac{-0{,}2\,e^{-0{,}2x}}{\left(1+e^{-0{,}2x}\right)^2}=\frac{0{,}2\,e^{-0{,}2x}}{\left(1+e^{-0{,}2x}\right)^2}$$

$\left(1+e^{-0{,}2x}\right)^2>0$ et $0{,}2\,e^{-0{,}2x}>0$

Tableau de variations:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ $\nearrow$	1

avec $f(0)=\dfrac{1}{1+e^{0}}=\dfrac{1}{2}$

2)b) Pour tout réel positif $p(x)=\dfrac{1}{1+e^{-0{,}2x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(-0{,}2\,x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0{,}2x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+e^{-0{,}2x}\right)=1$

Conclusion: $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x)=1$, la droite $y=1$ est asymptote horizontale à la courbe au voisinage de $+\infty$

2)c) Sur le long terme, tous les individus seront équipés

3) $p(x)=\dfrac{1}{1+e^{-0{,}2x}}\geqslant 0{,}95$

$$\frac{1}{1+e^{-0{,}2x}}\geqslant 0{,}95 \Leftrightarrow 1\geqslant 0{,}95\left(1+e^{-0{,}2x}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{0{,}95}-1\geqslant e^{-0{,}2x} \Leftrightarrow \frac{0{,}05}{0{,}95}\geqslant e^{-0{,}2x}$$

$\Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{0{,}05}{0{,}95}\right)\geqslant -0{,}2\,x$ (la fonction "ln" est croissante sur $]0\ ;+\infty[$)

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{0{,}05}{0{,}95}\right)}{-0{,}2}\leqslant x \text{ avec } \frac{\ln\left(\frac{0{,}05}{0{,}95}\right)}{-0{,}2}\approx 14{,}72$$

Au cours de l'année $2000+14=2014$ le marché sera saturé entre le mois d'Août et le mois de Septembre

($0{,}72\times 12=8{,}64$ soit plus de 8 mois)

4)a) $\dfrac{e^{0{,}2x}}{1+e^{0{,}2x}}=\dfrac{e^{0{,}2x}\times 1}{e^{0{,}2x}\left(e^{-0{,}2x}+1\right)}=\dfrac{1}{1+e^{-0{,}2x}}=p(x)$

4)b) Pour tout réel positif,

$$p(x)=\frac{e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}}=\left(\frac{1}{0,2}\right)\times\frac{0,2\,e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}}=5\times\frac{0,2\,e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}}$$ (forme $\frac{u'}{u}$ primitive $ln(u)$)

Une primitive de la fonction p est la fonction $\mathbf{P}$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par: $\mathbf{P}(x)=5\ln\left(1+e^{0,2x}\right)$

4)c) $m=\frac{1}{2}\int_8^{10}p(x)\,dx=\frac{1}{2}\left[\mathbf{P}(x)\right]_8^{10}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{P}(10)-\mathbf{P}(8)\right)$

$$m=\frac{1}{2}\left(5\ln\left(1+e^{2}\right)-5\ln\left(1+e^{1,6}\right)\right)=\frac{5}{2}\times\ln\left(\frac{1+e^{2}}{1+e^{1,6}}\right)\approx 0,86$$

Exercice 2:

Partie A: étude trajectoire du drone d'Alex

1) Représentation paramétrique de la droite $(\mathbf{AB})$

Un vecteur directeur de la droite $(\mathbf{AB})$ est: $\overrightarrow{\mathbf{AB}}\,(0\,;2\,;0,5)$

La droite $(\mathbf{AB})$ passe par le point $\mathbf{A}$

$$\begin{cases}x=x_{A}+\alpha\,t\\ y=y_{A}+\beta\,t\\ z=z_{A}+\gamma\,t\end{cases},\ t\in\mathbf{R}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=4+2\,t\\ z=0,25+0,5\,t\end{cases},\ t\in\mathbf{R}$$

2)a) $\vec{n}\,(0\,;1\,;-1)$ vecteur normal du plan $(\mathbf{PQU})$?

$\overrightarrow{\mathbf{PQ}}\,(0\,;1\,;1)$ et $\overrightarrow{\mathbf{PU}}\,(10\,;0\,;0)$ deux vecteurs non colinéaires du plan $(\mathbf{PQU})$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathbf{PQ}}=0+1-1=0$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathbf{PU}}=0+0+0=0$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $(\mathbf{PQU})$: $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan $(\mathbf{PQU})$

2)b) Equation cartésienne du plan $(\mathbf{PQU})$

$a\,x+b\,y+c\,z+d=0$ avec $\vec{n}\,(a\,;b\,;c)$

$\vec{n}\,(0\,;1\,;-1)$ d'où $y-z+d=0$

Le point $\mathbf{P}(0\,;10\,;0)$ appartient au plan $(\mathbf{PQU})$: $y_{P}-z_{P}+d=0\Leftrightarrow 10+d=0\Leftrightarrow d=-10$

Equation du plan $(\mathbf{PQU})$: $y-z-10=0$

3) $$\begin{cases}x=2\\ y=4+2\,t\\ z=0,25+0,5\,t\\ y-z-10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=4+2\,t\\ z=0,25+0,5\,t\\ (4+2\,t)-(0,25+0,5\,t)-10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=4+2\,t\\ z=0,25+0,5\,t\\ 3,75+1,5\,t=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=4+2\,t\\ z=0,25+0,5\,t\\ t=\frac{10-3,75}{1,5}=\frac{6,25}{1,5}=\frac{25}{6}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=2\\ y=4+2\times\frac{25}{6}=\frac{74}{6}=\frac{37}{3}\\ z=0,25+0,5\times\frac{25}{6}=\frac{7}{3}\end{cases}$$

La droite $(\mathbf{AB})$ et le plan $(\mathbf{PQU})$ sont sécants au point $\mathbf{I}$ de coordonnées: $\mathbf{I}\left(2\,;\frac{37}{3}\,;\frac{7}{3}\right)$

4) On sait que: $\mathbf{I}\left(2\,;\frac{37}{3}\,;\frac{7}{3}\right)$ et $\mathbf{Q}(0\,;11\,;1)$ et $\mathbf{T}(10\,;11\,;1)$

$\frac{7}{3}\approx 2,3\geqslant 1$ donc l'altitude du drone est supérieure à celle de l'obstacle

Partie B: distence minimale entre les deux trajectoires

1) On sait que $\overrightarrow{\mathbf{AM}}=a\,\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{CN}}=b\,\overrightarrow{\mathbf{CD}}$

Relation de Chasles:

$\overrightarrow{\mathbf{MN}}=\overrightarrow{\mathbf{MA}}+\overrightarrow{\mathbf{AC}}+\overrightarrow{\mathbf{CN}}=-\overrightarrow{\mathbf{AM}}+\overrightarrow{\mathbf{AC}}+\overrightarrow{\mathbf{CN}}=-a\,\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\overrightarrow{\mathbf{AC}}+b\,\overrightarrow{\mathbf{CD}}$

$\overrightarrow{\mathbf{AB}}\,(0\,;2\,;0,5)$ d'où $a\,\overrightarrow{\mathbf{AB}}\,(0\,;2\,a\,;0,5\,a)$, $\overrightarrow{\mathbf{AC}}\,(2\,;2\,;0)$ et $\overrightarrow{\mathbf{CD}}\,(-2\,;0\,;0)$ d'où $b\,\overrightarrow{\mathbf{CD}}\,(-2\,b\,;0\,;0)$

Les coordonnées de $\overrightarrow{\mathbf{MN}}$ sont::

$\overrightarrow{\mathbf{MN}}\,(2-2\,b\,;-2\,a+2\,;-0,5\,a)$

2) $\overrightarrow{\mathbf{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{CD}}=-2\,(2-2\,b)+0$

$\overrightarrow{\mathbf{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{AB}}=2\,(-2\,a+2)+0,5\times(-0,5\,a)=-4\,a+4-\frac{1}{4}\,a=\frac{-17}{4}\,a+4$

La droite $(\mathbf{MN})$ est perpendiculaire à la droite $(\mathbf{AB})$ et à la droite $(\mathbf{CD})$:

$$\begin{cases}-2\,(2-2\,b)=0\\ \frac{-17}{4}\,a+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2=2\,b\\ \frac{17}{4}\,a=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1\\ a=\frac{16}{17}\end{cases}$$

La distance $\mathbf{MN}$ est minimale lorsque $a=\frac{16}{17}$ et $b=1$

3) $\overrightarrow{\mathbf{MN}}\left(0\,;2-\frac{32}{17}\,;-\frac{16}{34}\right)$ soit $\overrightarrow{\mathbf{MN}}\left(0\,;\frac{2}{17}\,;-\frac{8}{17}\right)$

$$\mathbf{MN}=\sqrt{(0)^2+\left(\frac{2}{17}\right)^2+\left(\frac{-8}{17}\right)^2}=\sqrt{\frac{68}{289}}=\frac{\sqrt{68}}{17}=\frac{2\sqrt{17}}{17}$$

$\mathbf{MN}\approx 0,49$

Attention: *une unité correspond à* 10 *mètres*

Conclusion: la distance minimale qui sépare les deux drones est environ égale à $4{,}9\ m$.

Comme $4{,}9 \geqslant 4$, il n,y aura pas de collision entre les deux drones.

Exercice 3:

1) $c = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(1 + i\sqrt{3}\right) \neq \frac{1}{4}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$

Affirmation 1: Fausse

2) Pour tout entier n, $c^{3n} = \left(\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{3n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3n} \times \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{3n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3n} \times \left(e^{in\pi}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3n} \times \left(\cos(n\pi) + i\sin(n\pi)\right)$

$c^{3n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3n} \times \cos(n\pi)$ avec $\begin{cases} \cos(n\pi) = 1, & n \ pair \\ \cos(n\pi) = -1, & n \ impair \end{cases}$ donc $c^{3n} \in \mathbf{R}$

Affirmation 2: Vraie

3) O affixe $z_O = 0$; S affixe $z_S = c^2 = \frac{1}{4} e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et T affixe $z_T = \frac{1}{c} = 2e^{i\frac{-\pi}{3}} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

On a: $z_O = 0$; $z_S = \frac{1}{8}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$ et $z_T = 1 - i\sqrt{3}$

Les vecteurs $\overrightarrow{OS}$ et $\overrightarrow{OT}$ ont pour affixe:

$z_{\overrightarrow{OS}} = z_S - z_O = \frac{-1}{8} + i\frac{\sqrt{3}}{8}$ et $z_{\overrightarrow{OT}} = z_T - z_O = 1 - i\sqrt{3} = -8\left(\frac{-1}{8} + i\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$

Donc $z_{\overrightarrow{OT}} = -8\, z_{\overrightarrow{OS}}$

Les vecteurs $\overrightarrow{OS}$ et $\overrightarrow{OT}$ sont colinéaires, les points $\mathbf{O}$, $\mathbf{S}$ et $\mathbf{T}$ sont alignés.

Affirmation 3: Vraie

4) $|c| = \left|\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = \frac{1}{2}\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = \frac{1}{2}$

$|c| + |c^2| + \cdots + |c^n| = |c| + |c|^2 + \cdots + |c|^n = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

On repère une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{2}$ et de raison $q = \frac{1}{2}$

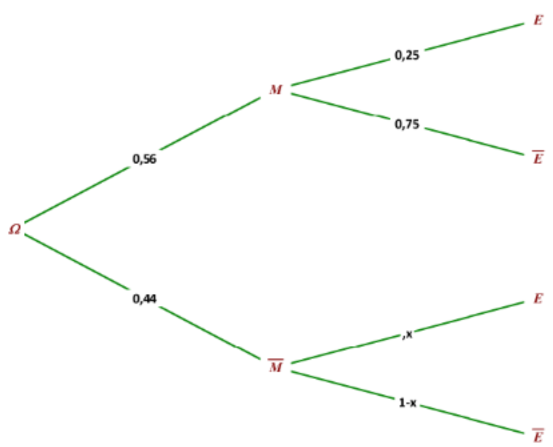
$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 1 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Affirmation 4: Vraie

Exercice 4:

Partie A:

1) Arbre pondéré:



2) Calcul: $\mathbf{P}(\mathbf{M} \cap \mathbf{E}) = ?$

$\mathbf{P}(\mathbf{M} \cap \mathbf{E}) = \mathbf{P}(\mathbf{M}) \times \mathbf{P}_{\mathbf{M}}(\mathbf{E}) = 0{,}56 \times 0{,}24 = 0{,}14$

3)a) Calcul : $\mathbf{P}(\mathbf{E}) = ?$

$\mathbf{P}(\mathbf{E}) = \mathbf{P}(\mathbf{M} \cap \mathbf{E}) + \mathbf{P}\left(\overline{\mathbf{M}} \cap \mathbf{E}\right) = \mathbf{P}(\mathbf{M}) \times \mathbf{P}_{\mathbf{M}}(\mathbf{E}) + \mathbf{P}\left(\overline{\mathbf{M}}\right) \times \mathbf{P}_{\overline{\mathbf{M}}}(\mathbf{E})$

$\mathbf{P}(\mathbf{E}) = 0{,}14 + 0{,}44\,x$

3)b) $16{,}2\ \%$ des téléspectateurs ont regardé le match:

$\mathbf{P}(\mathbf{E}) = 0{,}162 \Leftrightarrow 0{,}14 + 0{,}44\,x = 0{,}162 \Leftrightarrow x = \frac{0{,}162 - 0{,}14}{0{,}44}$

$x = 0{,}05$

4) Le téléspectateur interrogé n'a PAS regardé l'émission, probabilité qu'il ait regardé le match:

Calcul: $\mathbf{P}_{\overline{\mathbf{E}}}(\mathbf{M}) = ?$

$P\left(\overline{E}\right)=1-P(E)=1-0{,}14-0{,}44\times 0{,}05=0{,}838$

$P_{\overline{E}}(M)=\dfrac{P\left(M\cap \overline{E}\right)}{P\left(\overline{E}\right)}=\dfrac{P(M)\times P_M\left(\overline{E}\right)}{P\left(\overline{E}\right)}=\dfrac{0{,}56\times 0{,}75}{0{,}838}$

$P_{\overline{E}}(M)\approx 0{,}50$

La probabilité qu'il ait regardé le match sachant qu'il na pas regardé l'émission est égale à $0{,}50$

Partie B:

1) La variable aléatoire T suit une loi normale d'espérance $\mu=1{,}5$ et $\sigma=0{,}5$

a la calculatrice, on obtient:

$P\left(1\leqslant T\leqslant 2\right)\approx 0{,}683$

2) $P\left(T\geqslant t\right)=0{,}066$ d'où $P\left(T<t\right)=1-P\left(T\geqslant t\right)=1-0{,}066=0{,}934$

A la calculatrice, on trouve $t\approx 2{,}25$

Donc $6{,}6\ \%$ des téléspectateurs ont passé plus de $2\ h\ 15\ \ \text{min}$ devant la télévision le soir du match.

Partie C:

1) La variable aléatoire S suit une loi exponentielle de paramètre λ strictement positif.

$P\left(1\leqslant S\leqslant 2\right)=0{,}25$ car un quart de sboîtiers ont une durée de vie comprise entre 1 et 2 ans

$P\left(1\leqslant S\leqslant 2\right)=e^{-\lambda}-\left(e^{-2\lambda}\right)=\dfrac{1}{4}$

$e^{-\lambda}-\left(e^{-2\lambda}\right)=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow e^{-\lambda}-\left(e^{-2\lambda}\right)-\dfrac{1}{4}=0\Leftrightarrow \left(e^{-\lambda}\right)-\left(e^{-\lambda}\right)^2-\dfrac{1}{4}=0$ on pose $X=e^{-\lambda}$

on obtient l'équation suivante: $-X^2+X-\dfrac{1}{4}=0$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times(-1)\times\left(\dfrac{-1}{4}\right)=0$

une unique solution réelle : $X_0=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{1}{2}=0{,}5$

Donc $e^{-\lambda}=0{,}5\Leftrightarrow \ln\left(e^{-\lambda}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)\Leftrightarrow -\lambda=-\ln(2)$

d'où $\lambda=\ln(2)$

La durée moyenne des boîtiers est : $E(S)=\dfrac{1}{\lambda}$ soit $E(S)=\dfrac{1}{\ln(2)}\approx 1{,}44<3$

L'affirmation de l'usine est donc fausse .