Correction: Pondichéry/Centres Etrangers Juin 2019

Exercice 1:

Partie A:

1) Soit $\mathbf{X}$ la variable aléatoire qui compte le nombre de clients pratiquant le surf.
On répète des épreuves identiques et indépendantes et à chauqe épreuve il y a 2 issues:
- Succés $\mathbf{S}$:"le client pratique le surf" et $\mathbf{P}(\mathbf{S}) = p = 0{,}25$
- Echec $\overline{\mathbf{S}}$: "le client ne pratique pas le surf" et $\mathbf{P}\left(\overline{\mathbf{S}}\right) = 1 - \mathbf{P}(\mathbf{S}) = 1 - p = 0{,}75$

Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0{,}25$: $\mathbf{X} \sim \mathbf{B}(80\ ;\ 0{,}25)$

A la calculatrice, on trouve: $\mathbf{P}(\mathbf{X} = 20) = \binom{80}{20} p^{20} \times (1-p)^{80-20} \approx 0{,}103$

Réponse D

2) Soit $\mathbf{X}$ la variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 150$ et $\sigma = ?$

$\mathbf{P}(\mathbf{X} \geqslant 200) = 0{,}025$

$\mathbf{P}(\mathbf{X} \leqslant 100) + \mathbf{P}(150 - 50 \leqslant \mathbf{X} \leqslant 150 + 50) + \mathbf{P}(\mathbf{X} \geqslant 200) = 1$

Par symétrie par rapport à la droite d'équation $x = 150$: $\mathbf{P}(\mathbf{X} \geqslant 200) = \mathbf{P}(\mathbf{X} \leqslant 100) = 0{,}025$

Donc $\mathbf{P}(\mathbf{X} \geqslant 100) = 1 - \mathbf{P}(\mathbf{X} \leqslant 100) = 1 - 0{,}025 = 0975$

Réponse D

3) $\mathbf{E}(\mathbf{T}) = 5 = \dfrac{1}{\lambda} \iff \lambda = 0{,}2$

Donc $\mathbf{P}(\mathbf{T} \geqslant 5) = e^{-0{,}2 \times 5} = e^{-1}$

Réponse C

4) Intervalle de confiance de longueur $0{,}04$: $\mathbf{I_C} = \left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ; f + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right]$

Amplitude de cet intervalle: $\left(f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) - \left(f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{n}} = 0{,}04$

D'où $50 = \sqrt{n}$ donc $n = 2500$

Réponse B

Exercice 2:

Partie A:

1) Pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = (n+1)\ u_n - 1$

$u_1 = 0$

$u_2 = u_{1+1} = (1+1)\ u_1 - 1 = -1$

$u_3 = u_{2+1} = (2+1)\ u_2 - 1 = 3 \times (-1) - 1 = -3 - 1 = -4$

$u_4 = u_{3+1} = (3+1)\ u_3 - 1 = 4 \times (-4) - 1 = -16 - 1 = -17$

2) Algorithme:

```
Pour N allant de 1 à 12
      U ⟵ (N+1)×U−1
Fin Pour
```

3) D'après les tableaux de valeurs, il semblerait que:

Si $u_1 = 0{,}7$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Si $u_1 = 0{,}8$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Partie B:

1) La fonction $\mathbf{F}$ est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$: $\mathbf{F}(x) = (-1-x)\ e^{1-x}$

$\mathbf{F}'(x) = -e^{1-x} + (-1-x) \times \left(-e^{1-x}\right) = \left(-1-(-1-x)\right) e^{1-x} = x\,e^{1-x} = \mathbf{f}(x)$

$\mathbf{F}$ est une primitive de f sur $[0\ ;\ 1]$

2) $\mathbf{I}_1 = \int_0^1 \mathbf{f}(x)\ dx = [\ \mathbf{F}(x)\ ]_0^1 = \mathbf{F}(1) - \mathbf{F}(0) = -2 - (-e) = e - 2$

3) $\mathbf{I}_{n+1} = (n+1)\ \mathbf{I}_n - 1$

$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_{1+1} = (1+1)\ \mathbf{I}_1 - 1 = 2\,(e-2) - 1 = 2\,e - 4 - 1$

Donc $\mathbf{I}_2 = 2\,e - 5$

4)a) On sait que $x \in [0\ ;\ 1]$ d'où $0 \leqslant x \leqslant 1$

$\iff -1 \leqslant -x \leqslant 0 \iff 0 \leqslant 1 - x \leqslant 1 \iff e^0 \leqslant e^{1-x} \leqslant e^1$ (la fonction "exp" est croissante sur $\mathbf{R}$

Comme $x \geqslant 0$ on a $x^n \geqslant 0$

$x^n\,e^0 \leqslant x^n\,e^{1-x} \leqslant x^n\,e^1 \iff x^n \leqslant x^n\,e^{1-x} \leqslant e\,x^n \iff 0 \leqslant x^n\,e^{1-x} \leqslant x^n\,e$

4)b) $\int_0^1 x^n\,e\,dx = e\int_0^1 x^n\,dx = e\left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = e\left(\dfrac{1^{n+1}}{n+1}\right) - 0 = \dfrac{e}{n+1}$

4)c) $0 \leqslant x^n\,e^{1-x} \leqslant x^n\,e$ on intégre sur $[0\ ;\ 1]$

D'où $\int_0^1 0\,dx \leqslant \int_0^1 x^n\,e^{1-x}\,dx \leqslant \int_0^1 x^n\,e\,dx \iff 0 \leqslant \mathbf{I}_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$ (question 4)b))

4)d) Théorème de l'encadrement (ou théorèmes des gendarmes)

$0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{e}{n+1} \right) = 0$

Conclusion: $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

Partie C:

1) ***Initialisation***: $n=1$: $1!\left(u_1 - e + 2\right) + I_1 = u_1 - e + 2 + (e-2) = u_1$

Propriété vraie au rang $n=1$

Hérédité: on suppose que la propriété est vraie au rang n et on doit démontrer qu'elle est vraie au rang $n+1$

$u_{n+1} = (n+1)\, u_n - 1 = (n+1)\left(n!\left(u_1 - e + 2\right) + I_n\right) - 1 = (n+1)!\left(u_1 - e + 2\right) + (n+1)\, I_n - 1$

Donc $u_{n+1} = (n+1)!\left(u_1 - e + 2\right) + I_{n+1}$ car $I_{n+1} = (n+1)\, I_n - 1$

Propriété vraie au rang $n+1$

Conclusion: Pour tout $n \geqslant 1$, on a: $u_n = n!\left(u_1 - e + 2\right) + I_n$

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} n! = +\infty$ (admis)

Si $u_1 = 0{,}7$: $u_n = n!\,(0{,}7 - e + 2) + I_n = n!\,(2{,}7 - e) + I_n$ avec $2{,}7 - e < 0$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Si $u_1 = 0{,}8$: $u_n = n!\,(0{,}8 - e + 2) + I_n = n!\,(2{,}8 - e) + I_n$ avec $2{,}8 - e > 0$

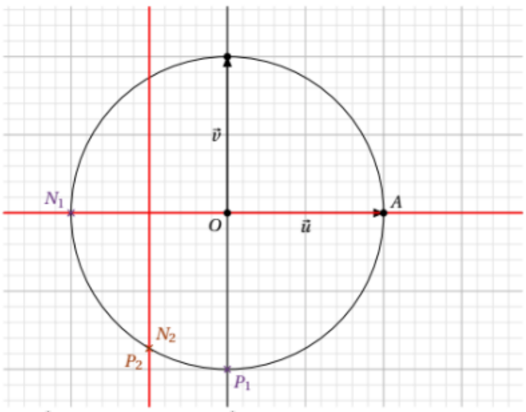
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Exercice 3:

1)a) ***Un premier exemple:***

$z^2 = i^2 = -1$ et $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{i} = \dfrac{i}{i^2} = \dfrac{i}{-1} = -i$

1)b) Graphique: N_1 : affixe z^2 et P_1 : affixe $\dfrac{1}{z}$



$\overrightarrow{AN_1}\ (-2\ ;\ 0)$ et $\overrightarrow{AP_1}\ (-1\ ;\ -1)$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires; les points A , N_1 et P_1 ne sont pas alignés

2) Equation:

$z^2 + z + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 = 3i^2$

Deux solutions complexes conjuguées:

$z_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$

3)a) ***Un deuxième exemple:***

$z = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$

$|z| = \sqrt{\left(\dfrac{-1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = 1$

$\begin{cases} \cos\ \theta = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\ \theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \dfrac{2\pi}{3}$ donc $z = 1\, e^{i\frac{2\pi}{3}}$

donc $z^2 = \left(1\, e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = 1\, e^{i\frac{4\pi}{3}}$ et $\dfrac{1}{z} = z^{-1} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

3)b) Voir graphique: N_2 : affixe z^2 et P_2 : affixe $\dfrac{1}{z}$

avec $z^2 = \left(1\, e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = 1\, e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{6\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{-2\pi}{3}}$ et $\dfrac{1}{z} = z^{-1} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

On constate que les points $\mathbf{N_2}$ et $\mathbf{P_2}$ sont confondus

Les points $\mathbf{A}$, $\mathbf{N_2}$ et $\mathbf{P_2}$ sont alignés.

Partie B: étude du cas général

1) $z\neq 0$; $\left(z^2+z+1\right)\times\left(1-\dfrac{1}{z}\right)=z^2+\left(\cancel{z+1-z-1}\right)-\dfrac{1}{z}=z^2-\dfrac{1}{z}$

2) $z\neq 0$; $\overrightarrow{\mathbf{PN}}$ affixe: $z^2-\dfrac{1}{z}$

$\overrightarrow{\mathbf{PA}}$ affixe: $1-\dfrac{1}{z}$

Les deux vecteurs sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{\mathbf{PN}}=k\,\overrightarrow{\mathbf{PA}}$

D'où $z^2-\dfrac{1}{z}=k\left(1-\dfrac{1}{z}\right)$

Question 1 partie B: on a vu que: $\left(z^2+z+1\right)\times\left(1-\dfrac{1}{z}\right)=z^2-\dfrac{1}{z}$

Les points $\mathbf{A}$, $\mathbf{N}$ et $\mathbf{P}$ sont alignés si et seulement si $\left(z^2+z+1\right)\in\mathbf{R}$

3) $\left(z^2+z+1\right)=(x+iy)^2+(x+iy)+1=x^2+2ixy-y^2+x+iy+1=\left(x^2+x-y^2+1\right)+i\,(2xy+y)$

4)a) L'ensemble des points M $\left(z\neq 0\right)$ tels que les points $\mathbf{A}$, $\mathbf{N}$ et $\mathbf{P}$ soient alignés cela signifie que :

La partie imaginaire est nulle, soit $(2xy+y)=0$

$(2xy+y)=0 \Leftrightarrow y\,(2x+1)=0$

Un produit de facteur est nul si l'un de ses facteurs est nul d'où:

$\begin{cases}y=0\\2x+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\x=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

L'ensemble cherché est la rèunion de l'axe des abscisses $\left(y=0\right)$ ***privé de l'origine*** $\left(z\neq 0\right)$ et la droite d'équation $x=-\dfrac{1}{2}$

4)b) Voir figure

Exercice 4:

1)a) Coordonnées de points suivants: $\mathbf{P}\,(2\,;\,0\,;\,0)$, $\mathbf{Q}\,(0\,;\,0\,;\,2)$ et $\mathbf{\Omega}\,(3\,;\,3\,;\,3)$

1)b) $\vec{n}\,(1\,;\,b\,;\,c)$ est un vecteur normal au plan $(\mathbf{PQR})$

On a: $\mathbf{R}\,(0\,;\,4\,;\,6)$ d'où $\overrightarrow{\mathbf{PR}}\,(-2\,;\,4\,;\,6)$ et $\overrightarrow{\mathbf{QR}}\,(0\,;\,4\,;\,4)$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathbf{PR}}=-2+4b+6c=0$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathbf{QR}}=4b+4c=0$

$\begin{cases}4b+6c=2\\b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=-b\\4b-6b=-2b=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=-b\\b=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-1\\c=1\end{cases}$

Un vecteur normal a pour coordonnées: $\vec{n}\,(1\,;\,-1\,;\,1)$

1)c) $ax+by+cz+d=0$ et $\vec{n}\,(a\,;\,b\,;\,c)$

Equation du plan $(\mathbf{PQR})$: $1x-1y+1z+d=0$

$\mathbf{P}\in(\mathbf{PQR})$ d'où $x_P-y_P+z_P+d=2+d=0 \Leftrightarrow d=-2$

$(\mathbf{PQR}):x-y+z-2=0$

2)a) La droite Δ est perpendiculaire au plan $(\mathbf{PQR})$ et passe par le point Ω :

Un vecteur directeur de la droite Δ est colinéaire à un vecteur normal au plan $(\mathbf{PQR})$

$\vec{n}\,(1\,;\,-1\,;\,1)$ est un vecteur directeur de Δ et $\mathbf{\Omega}\,(3\,;\,3\,;\,3)\in\mathbf{\Delta}$

Représentation paramétrique:

$\begin{cases}x=3+k\\y=3-k\\z=3+k\end{cases}$, $k\in\mathbf{R}$

2)b) Δ coupe le plan $(\mathbf{PQR})$

$$\begin{cases}x=3+k\\y=3-k\\z=3+k\\x-y+z-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3+k\\y=3-k\\z=3+k\\3+k-3+k+3+k-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3+k\\y=3-k\\z=3+k\\3k+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3+k\\y=3-k\\z=3+k\\k=-\dfrac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3-\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{3}\\y=3+\dfrac{1}{3}=\dfrac{10}{3}\\z=3-\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{3}\\k=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

La droite Δ coupe le plan $(\mathbf{PQR})$ au point $\mathbf{I}$ de coordonnées : $\mathbf{I}\left(\dfrac{8}{3}\,;\,\dfrac{10}{3}\,;\,\dfrac{8}{3}\right)$

2)c) $\mathbf{\Omega\,I}=\sqrt{\left(x_I-x_\Omega\right)^2+\left(y_I-y_\Omega\right)^2+\left(z_I-z_\Omega\right)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3)a) $\mathbf{J}$ appartient au plan $(\mathbf{PQR})$:?

$x_J-y_J+z_J-2=6-4+0-2=0$

Le point $\mathbf{J}$ appartient au plan $(\mathbf{PQR})$

3)b) $\overrightarrow{\mathbf{JK}}\,(0\,;\,2\,;\,2)$ et $\overrightarrow{\mathbf{QR}}\,(0\,;\,4\,;\,4)$

On constate que: $\overrightarrow{\mathbf{QR}}=2\,\overrightarrow{\mathbf{JK}}$

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{JK}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{QR}}$ sont colinéaires

Les droites (JK) et (QR) sont parallèles.

3)c) On place le point $J(4\ ;\ 6\ ;\ 0)$.

On trace la parallèle à la droite (QR) passant par J : elle coupe la droite (CG) en K .

On trace la parallèle à la droite (PJ) passant par R : elle coupe la droite (HG) en S .