Correction: Métropole 21 Juin 2019

Exercice 1:

1)a) $\mathbf{f}(x)=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\left(e^{x}+\frac{1}{e^{x}}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{x}}\right)=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}+\frac{1}{e^{x}}\right)=+\infty$

Conclusion: $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathbf{f}(x)=-\infty$

1)b) On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par: $\mathbf{f}(x)=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)$

La fonction est dérivable sur $\mathbf{R}$

$\mathbf{f}'(x)=-\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)$ (car $\left(e^{u}\right)'=u'\times e^{u}$)

Signe de la dérivée:

$e^{x}-e^{-x}=0 \Leftrightarrow e^{x}=e^{-x} \Leftrightarrow x=-x \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$

$e^{x}-e^{-x}\geqslant 0 \Leftrightarrow e^{x}\geqslant e^{-x} \Leftrightarrow x\geqslant -x \Leftrightarrow 2x\geqslant 0 \Leftrightarrow x\geqslant 0$

x	$-\infty$ $\quad 0 \quad$ $+\infty$
$e^{x}-e^{-x}$	$-$ 0 $+$
$-\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)$	$+$ 0 $-$

Tableau de variations:

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$\mathbf{f}'(x)$	0 $\quad$ $-$
$\mathbf{f}(x)$	$\mathbf{f}(0)=\frac{5}{2}$ $\searrow$ $-\infty$

avec $f(0)=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\times 2=\frac{5}{2}$

La fonction f est décroissante sur $[0\ ;+\infty[$

1)c) $\mathbf{f}(x)=0$?

x	0 $\quad$ α $\quad$ $+\infty$
$\mathbf{f}'(x)$	0 $\quad$ $-$ $\quad$ $-$
$\mathbf{f}(x)$	$\frac{5}{2}>0$ $\searrow$ 0 $\searrow$ $-\infty$

La fonction f est continue et décroissante sur $[0\ ;+\infty[$

$f(0)>0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathbf{f}(x)=-\infty$ or $0\in\left]-\infty\ ;\ \frac{5}{2}\right]$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha\in[0\ ;+\infty[$ tel que $f(\alpha)=0$

2) $\mathbf{f}(-x)=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\left(e^{-x}+e^{x}\right)=\mathbf{f}(x)$

La fonction f est ***paire*** (la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées)

L'équation $\mathbf{f}(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in[0\ ;+\infty[$, par symétrie l'équation $\mathbf{f}(x)=0$ admet une unique $-\alpha\in]-\infty\ ;0]$

Sur $\mathbf{R}$ l'équation $\mathbf{f}(x)=0$ admet deux solutions.

Partie B:

1) Tableau de variations:

D'après partie A, la fonction f est paire et décroissante sur $[0\ ;+\infty[$ donc croissante sur $]-\infty\ ;0]$

x	$-\alpha$ $\quad$ 0 $\quad$ α
$\mathbf{f}'(x)$	$+$ 0 $-$
$\mathbf{f}(x)$	0 $\nearrow$ $\frac{5}{2}$ $\searrow$ 0

Le maximum est atteint pour $x=0$ et il vaut $\mathbf{f}(0)=\frac{5}{2}$: la hauteur d'un arceau est donc de $2{,}5\ m$

2)a) $1+\left(\mathbf{f}'(x)\right)^{2}=1+\left(-\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)\right)^{2}=1+\frac{1}{4}\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}=1+\frac{1}{4}\left(e^{2x}-2+e^{-2x}\right)$

$1+\left(\mathbf{f}'(x)\right)^{2}=1+\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{2}{4}+\frac{1}{4}e^{-2x}=\frac{4}{4}+\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{2}{4}+\frac{1}{4}e^{-2x}=\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}e^{-2x}$

$1+\left(\mathbf{f}'(x)\right)^{2}=\frac{1}{4}\left(e^{2x}+2+e^{-2x}\right)=\frac{1}{4}\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}$

2)b) La fonction "exp" est strictement positive sur $\mathbf{R}$ d'où $e^{x}+e^{-x}>0$

$\mathbf{I}=\int_{0}^{\alpha}\sqrt{1+\left(\mathbf{f}'(x)\right)^{2}}\,dx=\int_{0}^{\alpha}\sqrt{\frac{1}{4}\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}}\,dx=\int_{0}^{\alpha}\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{\alpha}e^{x}\,dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{\alpha}e^{-x}\,dx$

$\mathbf{I}=\frac{1}{2}\left[e^{x}\right]_{0}^{\alpha}+\frac{1}{2}\left[-e^{-x}\right]_{0}^{\alpha}=\frac{1}{2}\left(e^{\alpha}-1\right)+\frac{1}{2}\left(-e^{\alpha}+1\right)=\frac{1}{2}\left(e^{\alpha}-e^{-\alpha}\right)$

La longueur d'un arceau est donc: $l=2\times\mathbf{I}=\left(e^{\alpha}-e^{-\alpha}\right)$

Partie C:

1) La fonction f est continue et positive sur $[-\alpha\ ;\alpha]$

Aire de la bâche façade nord est égale à l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-\alpha$ et $x=\alpha$

$\mathbf{J}=\int_{-\alpha}^{\alpha} \mathrm{f}(x)\ d x=2 \int_{0}^{\alpha} \mathrm{f}(x)\ d x$ car la fonction est paire

Aire de la porte: $1\times 2=2\ m^2$

Aire cherchée est égale à l'aire façade nord +aire façade sud - aire porte

$\mathbf{A}=2 \int_{0}^{\alpha} \mathrm{f}(x)\ d x+2 \int_{0}^{\alpha} \mathrm{f}(x)\ d x-2=4 \int_{0}^{\alpha} \mathrm{f}(x)\ d x-2$

2) On prend $\alpha \approx 1{,}92$

on sait que la longueur d'un arceau est: $l=2\times \mathbf{I}=\left(e^{\alpha}-\left(e^{-\alpha}\right)\right)$

Donc l'aire de la bâche (=rectangle recouvrant serre) est égale à : $3\times 1{,}5\times l=4{,}5\times l=4{,}5\left(e^{\alpha}-\left(e^{-\alpha}\right)\right)$

$\int_{0}^{\alpha} \mathrm{f}(x)\ d x=\left[\ \frac{7}{2}\ x-\frac{1}{2}\left(e^{x}-\left(e^{-x}\right)\right)\right]_{0}^{\alpha}=\frac{7}{2}\ \alpha-\frac{1}{2}\left(e^{\alpha}-\left(e^{-\alpha}\right)\right)$

$\mathbf{A}_{totale}=4\left(\frac{7}{2}\ \alpha-\frac{1}{2}\left(e^{\alpha}-\left(e^{-\alpha}\right)\right)\right)-2+4{,}5\left(e^{\alpha}-\left(e^{-\alpha}\right)\right)=14\ \alpha-2-2\left(e^{\alpha}-\left(e^{-\alpha}\right)\right)+4{,}5\left(e^{\alpha}-\left(e^{-\alpha}\right)\right)$

$\mathbf{A}_{totale}=14\ \alpha+2{,}5\left(e^{\alpha}-\left(e^{-\alpha}\right)\right)-2\approx 41{,}57$

Conclusion: il faut prévoir $42\ m^2$ de bâche pour cette serre.

Exercice 2:

1)a) La variable aléatoire suit une loi uniforme sur $[9\ ;\ 25]$

La durée moyenne d'une partie de type A est: $\mathbf{E}\ (\mathbf{X})=\frac{9+25}{2}=17$

Une partie de type A dure en moyenne 17 minutes.

1)b) graphiquement il semblerait que l'axe de symétrie de la courbe soit $x=\mu=17$

Une partie de type B dure en moyenne également 17 minutes.

2) On calcule: $\mathbf{P}\left(\mathbf{X}\leqslant 20\right)$

Type A: $\mathbf{P}\left(\mathbf{X}_{\mathrm{A}}\leqslant 20\right)=\mathbf{P}\left(9\leqslant \mathbf{X}_{\mathrm{A}}\leqslant 20\right)=\frac{20-9}{25-9}=\frac{11}{16}\approx 0{,}69$

Type B: $\mathbf{P}\left(\mathbf{X}\leqslant 20\right)\approx 0{,}84$

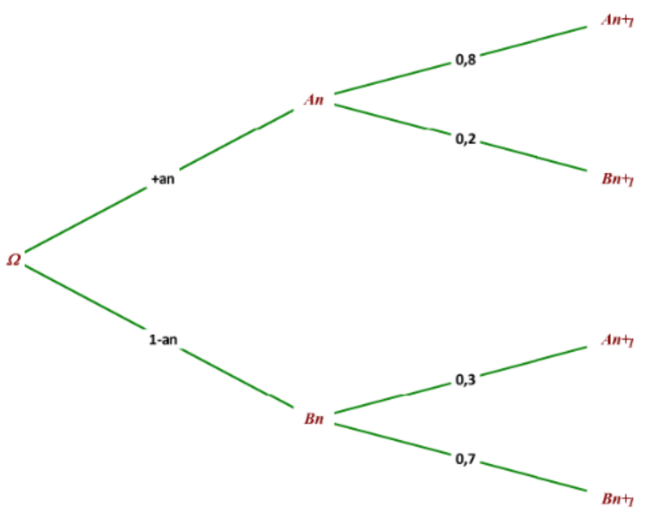
On choisit de manière équiprobable un type de jeu

La probabilité que la durée d'une partie soit inférieure à 20 minutes est:

$p=\frac{\mathbf{P}\left(\mathbf{X}_{\mathrm{A}}\leqslant 20\right)+\mathbf{P}\left(\mathbf{X}_{\mathrm{B}}\leqslant 20\right)}{2}$ donc $p\approx \frac{0{,}69+0{,}84}{2}\approx 0{,}77$

Partie B:

1) Arbre pondéré:



1)b) $a_{n+1}=\mathbf{P}\left(\mathbf{A}_{n+1}\right)=\mathbf{P}\left(\mathbf{A}_{n}\cap \mathbf{A}_{n+1}\right)+\mathbf{P}\left(\mathbf{B}_{n}\cap \mathbf{A}_{n+1}\right)=\mathbf{P}\left(\mathbf{A}_{n}\right)\times \mathbf{P}_{\mathbf{A}_{n}}\left(\mathbf{A}_{n+1}\right)+\mathbf{P}\left(\mathbf{B}_{n}\right)\times \mathbf{P}_{\mathbf{B}_{n}}\left(\mathbf{A}_{n+1}\right)$

$a_{n+1}=a_{n}\times 0{,}8+\left(1-a_{n}\right)\times 0{,}3=0{,}5\ a_{n}+0{,}3$

2)a) $a_{n+1}=0{,}5\ a_{n}+0{,}3$

Initialisation: $a_{1}=0{,}5$ donc la propriété est vraie au rang $n=1$

Hérédité: on suppose que la propriété est vraie au rang n : $0\leqslant a_{n}\leqslant 0{,}6$

on doit démontrer qu'elle est vraie au rang $n+1$: $0\leqslant a_{n+1}\leqslant 0{,}6$?

$0\leqslant a_{n}\leqslant 0{,}6 \iff 0\leqslant 0{,}5\ a_{n}\leqslant 0{,}6\times 0{,}5 \iff 0\leqslant a_{n}\leqslant 0{,}3 \iff 0{,}3\leqslant 0{,}5\ a_{n}+0{,}3\leqslant 0{,}3+0{,}3$

$\iff 0\leqslant 0{,}3\leqslant 0{,}5\ a_{n}+0{,}3\leqslant 0{,}6$

Donc $0\leqslant a_{n+1}\leqslant 0{,}6$, la propriété est vraie au rang $n+1$

Conclusion: Pour tout $n\geqslant 1$, $0\leqslant a_{n}\leqslant 0{,}6$

2)b) $a_{n+1}-a_{n}=0{,}5\ a_{n}+0{,}3-a_{n}=0{,}3-0{,}5\ a_{n}$

on sait que $a_{n}\leqslant 0{,}6 \iff -0{,}5\ a_{n}\geqslant -0{,}3 \iff 0{,}3-0{,}5\ a_{n}\geqslant 0$

Donc $a_{n+1}-a_{n}\geqslant 0$, la suite $\left(a_{n}\right)$ est donc croissante.

2)c) La suite est croissante et majorée, donc elle converge vers un réel l

$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} a_{n+1} = l$

D'où $l = 0{,}5\, l + 0{,}3 \Leftrightarrow 0{,}5\, l = 0{,}3 \Leftrightarrow l = \dfrac{0{,}3}{0{,}5} = \dfrac{3}{5}$ donc $l = 0{,}6$

La suite $\left(a_n\right)$ converge vers $l = 0{,}6$

3)a) $u_n = a_n - 0{,}6$ pour tout $n \geqslant 1$

$u_{n+1} = a_{n+1} - 0{,}6 = 0{,}5\, a_n + 0{,}3 - 0{,}6 = 0{,}5\, a_n - 0{,}3 = 0{,}5\left(a_n - \dfrac{0{,}3}{0{,}5}\right) = 0{,}5\left(a_n - 0{,}6\right)$

$u_{n+1} = 0{,}5\, u_n$

La suite $\left(u_n\right)$ est une suite géométrique de raison $q = 0{,}5$ et de premier terme $u_1 = a_1 - 0{,}6 = a - 0{,}6$

3)b) $u_n = u_1 \times q^{n-1} = (a - 0{,}6) \times (0{,}5)^{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$

$a_n = u_n + 0{,}6 = 0{,}6 + (a - 0{,}6) \times (0{,}5)^{n-1}$

3)c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(0{,}5^{n-1}\right) = 0$ car $q = 0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0{,}6$

Cette limite ne dépend pas de a

3)d) Sur le long terme, la probabilité que le joueur fasse un partie de type A est égale à $0{,}6$

La probabilité qu'il fasse une partei de type B est égale à $0{,}4$

il verra plus souvent la publicité incérée au début des parties de type A

Exercice 3:

1) $z^2 - 2\sqrt{3}\, z + 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4\, a\, c = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 4 = 12 - 16 = -4 = 4\, i^2$

2 solutions complexes conjuguées:

$z_1 = \dfrac{2\sqrt{3} - i\sqrt{4}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} - 2\, i}{2}$ et $z_2 = \dfrac{2\sqrt{3} + i\sqrt{4}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} + 2\, i}{2}$

$z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$

A a pour affixe: $z_{\mathrm{A}} = \sqrt{3} - i$

B a pour affixe: $z_{\mathrm{B}} = \sqrt{3} + i$

$\mathbf{O\,A} = \left|z_{\mathrm{A}}\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$\mathbf{O\,B} = \left|z_{\mathrm{B}}\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$\mathbf{A\,B} = \left|z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}\right| = \left|\sqrt{3} + i - \left(\sqrt{3} - i\right)\right| = |2\, i| = 2$ car $|i| = 1$

Le triangle OAB est équilatéral.

Affirmation 1: Vraie

2) $u = \sqrt{3} + i = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\, i\right)$ avec $\begin{cases} \cos\, \theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\, \theta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ d'où $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

Forme exponentielle de u: $u = 2\, e^{i\frac{\pi}{6}}$ d'où $\bar{u} = 2\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$u^{2019} + \left(\bar{u}\right)^{2019} = 2^{2019}\, e^{i\frac{2019\,\pi}{6}} + 2^{2019}\, e^{-i\frac{2019\,\pi}{6}} = 2^{2019}\left(\cos\left(\dfrac{673\,\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{673\,\pi}{2}\right) + \cos\left(\dfrac{673\,\pi}{2}\right) - i\sin\left(\dfrac{673\,\pi}{2}\right)\right)$

$u^{2019} + \left(\bar{u}\right)^{2019} = 2^{2019}\left(2\cos\left(\dfrac{673\,\pi}{2}\right)\right)$

Mesure principale de $\dfrac{673\,\pi}{2}$: $\dfrac{673\,\pi}{2} = \dfrac{672\,\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = 336\,\pi + \dfrac{\pi}{2} = 168 \times (2\,\pi) + \dfrac{\pi}{2}$

Mesure principale de $\dfrac{673\,\pi}{2}$: $\dfrac{\pi}{2}$

$u^{2019} + \left(\bar{u}\right)^{2019} = 2^{2019}\left(2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = 0$

Affirmation 2: Fausse

3) La fonction f_n est dérivable sur $[0\,;+\infty[$

$\mathrm{f}_n(x) = x\, e^{-n x + 1}$ (forme $u \times v$ donc sa dérivée forme: $u' \times v + u \times v'$)

$(f')_n(x) = 1 \times e^{-n x+1} + x \times \left(-n\, e^{-n x+1}\right) = e^{-n x+1}\,(1 - n x)$

Le signe de la dérivée dépend du signe de $(1 - n x)$ (la fonction "expo" est srictement positive sur $\mathbf{R}$

$(1 - n x) = 0 \Leftrightarrow n x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{n}$, $n \geqslant 1$

x	0 $\quad \dfrac{1}{n}$ $\quad +\infty$
$1 - n x$	$+$ $\quad 0$ $\quad -$

Tableau variations:

x	0 $\qquad$ $\frac{1}{n}$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$
$f(x)$	$\nearrow$ $f\left(\frac{1}{n}\right)$ $\searrow$

Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction f_n admet un maximum en $\frac{1}{n}$

Affirmation 3: Vraie

4) $f(x) = \cos(x) \times e^{-x}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow -\left(e^{-x}\right) \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\left(e^{-x}\right)\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{-x}\right) = 0$ (si $x \mapsto +\infty$ alors $-x \mapsto -\infty$)

Donc d'après le théorème d'encadrement (ou des gendarmes) : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Ce qui signifie que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe au voisinage de $+\infty$

Affirmation 4: Vraie

5) A est un réel et $A > 0$

La variable l contient La valeur 15 à la fin de l'exécution de l'algorithme

Ce qui signifie que: $2^{14} \leqslant A$ et $2^{15} \geqslant A$

Donc on a: $2^{14} \leqslant A \leqslant 2^{15}$ d'où $\ln\left(2^{14}\right) \leqslant \ln(A) \leqslant \ln\left(2^{15}\right)$ car la fonction "ln" est croissante sur $]0\,;+\infty[$

D'où $14 \ln(2) \leqslant \ln(A) \leqslant 15 \ln(2)$ car $\ln a^n = n \ln(a)$

Exercice 4:

1) Les droites (AE) et (HK) sont incluses dans le plan (EAH) .

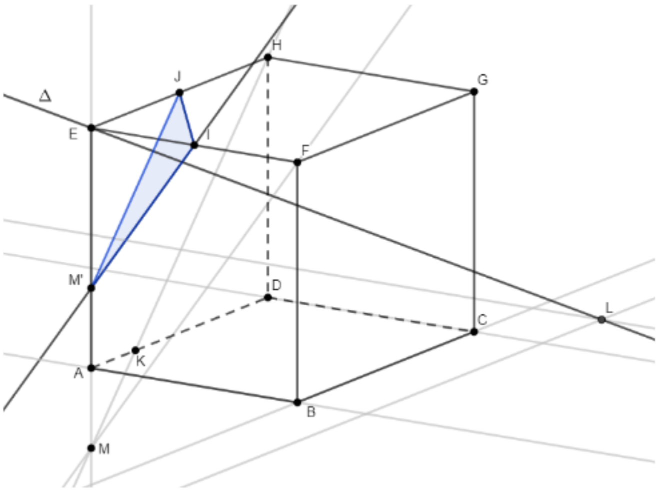
Le point M est à l'intersection des droites (AE) et (HK)

2) Dans le triangle EFH , I milieu du segment $[EF]$ et J milieu du segment $[EH]$

donc d'après le théorème de la droite des milieux, les droites (IJ) et (FH) sont parallèles

La droite (FM) est l'intersection des plans (AEF) et (FHK)

L'intersection du plan P et de la face $ABFE$ est donc la droite parallèle à la droite (FM) passant par le point I .



Partie B:

1)a) Repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$ les point F , H et K ont pour coordonnées: $\begin{cases} F(1\,;0\,;1) \\ H(0\,;1\,;1) \\ K\left(0\,;\frac{1}{4}\,;0\right) \end{cases}$

car $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{FH} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = -4+4+0 = 0$$

$$\overrightarrow{FK} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{4} \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = -4+1+3 = 0$$

De plus les vecteurs $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FK}$ ne sont pas colinéaires

Donc le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FHK)

D'où $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan (FHK)

1)b) Equation de ce plan: $ax+by+cz+d=0$ avec $\vec{n}\,(a\,;b\,;c)$

$\vec{n}\,(4\,;4\,;-3)$

$4x+4y-3z+d=0$

Le point $\mathbf{K}$ appartient à ce plan:

$4x_K+4y_K-3z_K+d=0+1-0+d=0$ d'où $d=-1$

Equation du plan $(\mathbf{F\,H\,K}): 4x+4y-3z-1=0$

1)c) Equation du plan $\mathbf{P}$: le plan $\mathbf{P}$ étant parallèle au plan $(\mathbf{F\,H\,K})$ et il passe par $\mathbf{I}\left(\frac{1}{2}\ ;0\ ;1\right)$

$\vec{n}\ (4\ ;4\ ;-3)$ est le vecteur normal au plan $(\mathbf{P})$

Equation du plan $\mathbf{P}$: $4x+4y-3z+d=0$

$\mathbf{I}$ appartient au plan $\mathbf{P}$: $4x_I+4y_I-3z_I+d=0 \Leftrightarrow 2+0-3+d=-1+d=0 \Leftrightarrow d=1$

Equation du plan $\mathbf{P}: 4x+4y-3z+1=0$

1)d) Coordonnées du point $\mathbf{M'}$ intersection du plan $\mathbf{P}$ et de la droite $(\mathbf{A\,E})$

Equation paramétrique de la droite $(\mathbf{A\,E})$:? $\mathbf{A}\ (0\ ;0\ ;0)$ et $\mathbf{E}\ (0\ ;0\ ;1)$

$\overrightarrow{AE}$ est un vecteur directeur de la droite $(\mathbf{A\,E})$: $\overrightarrow{AE}\ (0\ ;0\ ;1)$ et $\mathbf{A}\in(\mathbf{A\,E})$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=k \\ 4x+4y-3z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=k \\ -3k+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=k \\ k=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{1}{3} \\ x=0 \\ y=0 \\ z=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Le point $\mathbf{M'}$ a pour coordonnées : $\mathbf{M'}\left(0\ ;0\ ;\frac{1}{3}\right)$

2)a) La droite Δ passe par le point $\mathbf{E}$ et est orthogonale au plan $\mathbf{P}$

Le vecteur normal $\vec{n}$ à $\mathbf{P}$ est un vecteur directeur de la droite Δ

$$\begin{cases} x=x_E+4k \\ y=y_E+4k \\ z=z_E-3k \end{cases},\ k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0+4k \\ y=0+4k \\ z=1-3k \end{cases},\ k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4k \\ y=4k \\ z=1-3k \end{cases},\ k\in\mathbb{R}$$

2)b) Equation plan $(\mathbf{A\,B\,C}): z=0$

Coordonnées du point $\mathbf{L}$, intersection du plan $(\mathbf{A\,B\,C})$ et de la droite Δ:

$$\begin{cases} x=4k \\ y=4k \\ z=1-3k \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4k \\ y=4k \\ z=1-3k \\ 1-3k=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{3} \\ y=\frac{4}{3} \\ z=0 \\ k=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{1}{3} \\ x=\frac{4}{3} \\ y=\frac{4}{3} \\ z=0 \end{cases}$$

Le point $\mathbf{L}$ a pour coordonnées : $\mathbf{L}\left(\frac{4}{3}\ ;\frac{4}{3}\ ;0\right)$

2)c) voir figure

2)d) Les droites Δ et $(\mathbf{B\,F})$ sont-elles sécantes: $\overrightarrow{BF}\ (0\ ;0\ ;1)$ (avec $\mathbf{F}\ (1\ ;0\ ;1)$ et $\mathbf{B}\ (1\ ;0\ ;0)$)

$$\Delta\ \begin{cases} x=4k \\ y=4k \\ z=1-3k \end{cases},\ k\in\mathbb{R} \text{ et } (\mathbf{B\,F}) \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

$$\begin{cases} 4k=1 \\ 4k=0 \\ 1-3k=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{1}{4} \\ k=0 \end{cases} \text{ impossible}$$

Les droites Δ et $(\mathbf{B\,F})$ ne sont pas sécantes.

Les droites Δ et $(\mathbf{C\,G})$ sont-elles sécantes: $\overrightarrow{CG}\ (0\ ;0\ ;1)$ (avec $\mathbf{G}\ (1\ ;1\ ;1)$ et $\mathbf{C}\ (1\ ;1\ ;0)$)

$$\Delta\ \begin{cases} x=4k \\ y=4k \\ z=1-3k \end{cases},\ k\in\mathbb{R} \text{ et } (\mathbf{B\,F}) \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

$$\begin{cases} 4k=1 \\ 4k=1 \\ 1-3k=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{1}{4} \\ t=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Si $k=\frac{1}{4}$ on obtient le point de coordonnées: $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4} \end{cases}$

Si $t=\frac{1}{4}$ on obtient le point de coordonnées: $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=\frac{1}{4} \end{cases}$

Les droites Δ et $(\mathbf{C\,G})$ sont sécantes en un point de coordonnées $\left(1\ ;1\ ;\frac{1}{4}\right)$.