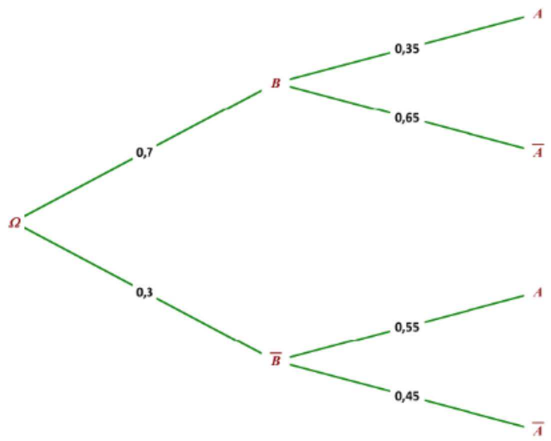
Correction: Pondichéry/Centres Etrangers Juin 2019

Exercice 1:

Partie A:

1) Arbre pondéré:



2) On calcule: $\mathbf{P(A)}$

D'après la formule des probabilités totales:

$$\mathbf{P(A)=P(A \cap B)+P\left(A \cap B^{-}\right)=P(B)\times P_B(A)+P\left(B^{-}\right)\times P_{B^{-}}(A)=0{,}7\times 0{,}35+0{,}30\ ,\ 55}$$

$\mathbf{P(A)=0{,}41}$

3) On calcule: $\mathbf{P_A(B):?}$

$$\mathbf{P_A(B)=\frac{P(A \cap B)}{P(A)}=\frac{P(B)\times P_B(A)}{P(A)}=\frac{0{,}7\times 0{,}35}{0{,}41}}$$

$\mathbf{P_A(B)\approx 0{,}598>0{,}5}$

Le directeur peut donc proposer la location de l'audioguide sur le site internet.

Partie B:

1) On calcule : $\mathbf{P\left(T\leqslant 6\right)}$

A la calculatrice on obtient: $\mathbf{P\left(T\leqslant 6\right)\approx 0{,}023}$

La probabilité qu'un visiteur reste moins de $\mathbf{6}$ minutes dans la boutique est environ égale à $\mathbf{0{,}023}$

2) On calcule $\mathbf{P\left(6\leqslant T\leqslant 14\right)}$

A la calculatrice on obtient: $\mathbf{P\left(6\leqslant T\leqslant 14\right)\approx 0{,}954}$

3) On sait que $\mathbf{P\left(T\geqslant \mathit{a}\right)=0{,}25}$

A la calculatrice, on obtient : $\mathbf{\mathit{a}\approx 11{,}35}$

Donc $\mathbf{\frac{1}{4}}$ des visiteurs passeront plus de $\mathbf{11{,}35}$ minutes dans la boutique

4) On sait que $\mathbf{\mathit{n}=720\geqslant 30}$; $\mathbf{\mathit{n}\times \mathit{p}=720\times 0{,}25=180\geqslant 5}$ et $\mathbf{\mathit{n}\times(1-\mathit{p})=720\times 0{,}75=540\geqslant 5}$

Les condions sont vérifiées

Intervalle de fluctuation au seuil de $\mathbf{95\ \%}$: $\mathbf{I=\left[\ \mathit{p}-1{,}96\times\sqrt{\frac{\mathit{p}\times(1-\mathit{p})}{\mathit{n}}}\ ;\mathit{p}+1{,}96\ \sqrt{\frac{\mathit{p}\times(1-\mathit{p})}{\mathit{n}}}\ \right]}$

$$\mathbf{I=\left[\ 0{,}25-1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}25\times 0{,}75}{720}}\ ;0{,}25+1\times ?{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}25\times 0{,}75}{720}}\ \right]}$$

D'où $\mathbf{I\approx[0{,}218\ ;0{,}282]}$

Calculons la fréquence observée: $\mathbf{\mathit{f}_{obs}=\frac{161}{720}\approx 0{,}224}$

On constate que $\mathbf{\mathit{f}_{obs}\in I}$, ce qui confirme l'étude.

Exercice 2:

1) On sait que: $\mathbf{\mathit{f}=\frac{817}{3000}}$ et $\mathbf{\mathit{n}=3000\geqslant 30}$; $\mathbf{\mathit{n}\times \mathit{f}=3000\times\frac{817}{3000}=817\geqslant 5}$ de plus $\mathbf{\mathit{n}\times(1-\mathit{f})=3000\times\frac{2183}{3000}=2183\geqslant 5}$

Les condions sont vérifiées

Intervalle de confiance au seuil de 0,95 : $\mathbf{I_{3000}=\left[\ \mathit{f}-\frac{1}{\sqrt{\mathit{n}}}\ ;\mathit{f}+\frac{1}{\sqrt{\mathit{n}}}\ \right]}$

$$\mathbf{I_{3000}=\left[\ \frac{817}{3000}-\frac{1}{\sqrt{3000}}\ ;\ \frac{817}{3000}+\frac{1}{\sqrt{3000}}\ \right]}$$

D'où $\mathbf{I\approx[0{,}254\ ;0{,}291]}$

Réponse D

2) $\mathbf{36\ \%}$ de $\mathbf{4200}$ soit: $\mathbf{4200\times\frac{36}{100}=42\times 36=1512}$

Réponse B

3) Choix algorithme:
Algorithme A : $\mathbf{N}$ n'est pas itéré dans la boucle « Tant Que » mais seulement à la fin de l'algorithme. ***Algorithme C*** : la variable $\mathbf{N}$ n'est pas modifiée.
Algorithme D : la condition sur $\mathbf{A}$ est fausse, il faut effectuer la boucle « Tant Que », tant que $\mathbf{A} < 30000$.
Réponse B
4) Le temps d'attente est modélisé par une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[1\ ;\ 10]$
Le visiteur attend ***au moins*** 5 minutes: $P(T \geqslant 5)$

$$P(T \geqslant 5) = P(5 \leqslant T \leqslant 10) = \frac{10-5}{10-1} = \frac{5}{9}$$

Réponse D

Exercice 3:

1)a) Le loueur se sépare de $20\ \%$ de son stock de vélos au départ auquel on ajoute les 35 nouveaux vélos.
En juillet 2018, il possédait 150 vélos.

$$u_1 = \left(1 - \frac{20}{100}\right) u_0 + 35 = 0{,}8 \times 150 + 35 = 120 + 35 = 155$$

Le 1er juillet 2019, il y aura 155 vélos à la location.
1)b) u_n représente le nombre de vélos présents dans le stock au 1^{er} juillet $2018+n$
u_{n+1} représente le nombre de vélos présents dans le stock au 1^{er} juillet $2018+(n+1)$
Le loueur se sépare de $20\ \%$ du stock donc il lui reste $0{,}8 \times u_n$ auxquels on rajoute 35 vélos donc on a:
$u_{n+1} = 0{,}8 \times u_n + 35$
2)a) Formule à saisir dans la case $\mathbf{B\,3}$: $= 0{,}8 \times \mathbf{B\,2} + 35$
2)b) il semblerait que: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 175$
3)a) $v_n = u_n - 175$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 175 = (0{,}8 \times u_n + 35) - 175 = 0{,}8 \times u_n - 140$$

$$v_{n+1} = 0{,}8 \times \left(u_n - \frac{140}{0{,}8}\right) = 0{,}8 \times (u_n - 175) = 0{,}8 \times v_n$$

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}8$ et $v_0 = u_0 - 175 = 150 - 175 = -25$
3)b) Expression de v_n en fonction de n: $v_n = v_0 \times q^n = -25 \times 0{,}8^n$
Expression de u_n en fonction de n: $u_n = v_n + 175$ donc $u_n = 175 - 25 \times 0{,}8^n$
3)c) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 175$ car $0 < q = 0{,}8 < 1$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}8^n = 0$
4) $u_n \geqslant 170 \iff 175 - 25 \times 0{,}8^n \geqslant 170 \iff -25 \times 0{,}8^n \geqslant 170 - 175 = -5 \iff 25 \times 0{,}8^n \leqslant 5$

$$\iff 0{,}8^n \leqslant \frac{5}{25} = \frac{1}{5} \iff \ln(0{,}8^n) \leqslant \ln\left(\frac{1}{5}\right) \iff n \times \ln(0{,}8) \leqslant \ln\left(\frac{1}{5}\right)$$

(fonction logarithme népérien est croissante sur $]0\ ;+\infty[$ et $\ln(0{,}8) \leqslant 0$

$$\iff n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{\ln(0{,}8)} \text{ avec } \frac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{\ln(0{,}8)} \approx 7{,}2$$

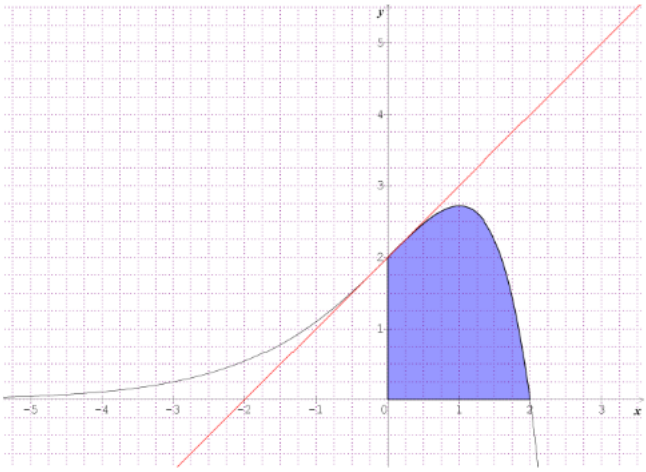
D'où $u_n \geqslant 170$ si $n \geqslant 8$
$2018 + 8 = 2026$: à partir de 2026 le nombre de vélos que possédera le loueur dépassera 170 vélos

Exercice 4:

Partie A:
1) Lecture graphique: $f(0) = 2$ car $A\ (0\ ;2) \in C_f$ et $f(2) = 0$ car $B\ (2\ ;0) \in C_f$
2) $f'(1) = 0$ car tangente horizontale à la courbe au point d'abscisse $x = 1$
3) Equation tangente à la courbe C_f au point $A\ (0\ ;2)$: droite $(A\ C)$
Son équation est de la forme: $y = a\,x + b$ où a est le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine : $b = 2$ car $A\ (0\ ;2) \in C_f$ et $a = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{0-2}{-2-0} =$
La tangente a pour équation: $y = 1\,x + 2$
4) On constate graphiquement que l'équation $f(x) = 1$ admet 2 solutions
Car la courbe représentative de la fonction f et la courbe d'équation $y = 1$ possède deux points d'intersection
5) Variations de la fonction f : graphiquement il semblerait:

x	-10		1		2
$f(x)$		$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	

6) Sur $[-10\ ;0]$ il semblerait que la courbe C_f soit au-dessus de ses tangentes: donc ***convexe***
Sur $[0\ ;2]$ il semblerait que la courbe C_f soit soit en-dessous de ses tangentes: donc ***concave***
7)a) C'est le domaine compris entre la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$



7)b) Graphiquement: $4 \leqslant \mathrm{I} \leqslant 5$

Partie B:

1) $\mathbf{f}(0) = (2-0)\, e^{0} = 2$ et $\mathbf{f}(2) = (2-2)\, e^{2} = 0$

2)a) La fonction f est dérivable sur $[-10\ ;\ 2]$

(forme $\mathbf{f}(x) = u(x) \times v(x)$, dérivée $\mathbf{f}'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$)

$\mathbf{f}'(x) = -e^{x} + (2-x)\, e^{x} = (-1+2-x)\, e^{x}$

$\mathbf{f}'(x) = (1-x)\, e^{x}$

2)b) $\mathbf{f}'(1) = (1-1)\, e^{1} = 0$

3) Equation tangente au point d'abscisse $x = 0$

$y = \mathbf{f}'(0)\ (x-0) + \mathbf{f}(0)$ avec $\begin{cases} \mathbf{f}'(0) = (1-0)\, e^{0} = 1 \\ \mathbf{f}(0) = 2 \end{cases}$

Donc $y = 1\,(x-0) + 2 = x+2$

Equation tangente: $y = x+2$

4)a) Tableau de variations:

$\mathbf{f}'(x) = (1-x)\, e^{x}$, le signe de la dérivée dépend du signe de $(1-x)$:

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$1-x$	+ 0 −

x	-10 1 2
$\mathbf{f}'(x)$	+ 0 −
$\mathbf{f}(x)$	$\mathbf{f}(-10)$ ↗ $\mathbf{f}(1)$ ↘ $\mathbf{f}(2)$

avec $\begin{cases} \mathbf{f}(-10) = 12\, e^{-10} < 1 \\ \mathbf{f}(1) = e > 1 \\ \mathbf{f}(2) = 0 < 1 \end{cases}$

4)b) La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-10\ ;\ 1]$

$\mathbf{f}(-10) < 1$ et $\mathbf{f}(1) > 1$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\mathbf{f}(x) = 1$ admet une unique solution α sur $[-10\ ;\ 1]$

A la calculatrice, on trouve: $\alpha \approx -1{,}15$

La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[1\ ;\ 2]$

$\mathbf{f}(2) < 1$ et $\mathbf{f}(1) > 1$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\mathbf{f}(x) = 1$ admet une unique solution β sur $[1\ ;\ 2]$

A la calculatrice, on trouve: $\beta \approx 1{,}84$

5) $f''(x) = -x\, e^{x}$, le signe de $f''(x)$ dépend du signe de $(-x)$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$-x$	+ 0 −

D'où le tableau suivant:

x	-10 0 2
$f''(x)$	+ 0 −
$\mathbf{f}(x)$	*c o n v e x e* | *c o n c a v e*

6)a) Pour tout $x \in [-10\ ;\ 2]$, la fonction $\mathbf{F}$ est dérivable sur cet intervalle:

$\mathbf{F}(x) = (3-x)\, e^{x}$

$\mathbf{F}'(x) = -e^{x} + (3-x)\, e^{x} = (-1+3-x)\, e^{x} = (2-x)\, e^{x} = \mathbf{f}(x)$

Donc la fonction $\mathbf{F}$ est une primitive de la fonction f sur $[-10\ ;\ 2]$

6)b) $\mathrm{I} = \int_{0}^{2} \mathbf{f}(x)\ dx = [\ \mathbf{F}(x)\ ]_0^2 = \mathbf{F}(2) - \mathbf{F}(0) = (3-2)\, e^{2} - (3-0)\, e^{0}$

$\mathrm{I} = e^{2} - 3 \approx 4{,}39$