Correction: Liban Mai 2019

Exercice 1:

1)a) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;1]$ par: $f(x)=x\left(1-\ln(x)\right)^2$

La fonction est dérivable sur $]0\ ;1]$

(la fonction est de la forme $(u\times v)$ et donc sa dérivée est de la forme $u'\times v+u\times v'$)

$$\begin{cases}u(x)=x\\ v(x)=\left(1-\ln(x)\right)^2\end{cases} \text{ d'où } \begin{cases}u'(x)=1\\ v'(x)=2\times\dfrac{1}{x}\times\left(1-\ln(x)\right)\end{cases}$$

$$f'(x)=1\times\left(1-\ln(x)\right)^2+x\times 2\times\left(\frac{-1}{x}\right)\times\left(1-\ln(x)\right)=\left(1-\ln(x)\right)^2-2\left(1-\ln(x)\right)$$

$$f'(x)=\left(1-\ln(x)\right)\left(\left(1-\ln(x)\right)-2\right)$$

D'où $f'(x)=\left(1-\ln(x)\right)\times\left(-1-\ln(x)\right)=\left(\ln(x)-1\right)\times\left(1+\ln(x)\right)$

1)b) $f'(x)=\left(\ln(x)-1\right)\times\left(1+\ln(x)\right)$

$$f'(x)=0 \iff \begin{cases}\ln(x)-1=0\\ \text{ou}\\ 1+\ln(x)=0\end{cases} \iff \begin{cases}\ln(x)=1=\ln(e)\\ \text{ou}\\ \ln(x)=-1=\ln\left(e^{-1}\right)\end{cases} \iff \begin{cases}x=e\\ \text{ou}\\ x=e^{-1}\end{cases}$$

Donc $x=e\notin]0\ ;1]$ et $x=e^{-1}\in]0\ ;1]$

Signe de: $1+\ln(x)$ et $\ln(x)-1$

$$\begin{cases}\ln(x)+1>0\\ \ln(x)-1>0\end{cases} \iff \begin{cases}\ln(x)>-1\\ \ln(x)>1\end{cases} \iff \begin{cases}\ln(x)>\ln\left(e^{-1}\right)\\ \ln(x)>\ln(e)\end{cases} \iff \begin{cases}x>e^{-1}\\ x>e\end{cases}$$

x	0 $\quad e^{-1}$ $\quad 1$
$\ln(x)+1$	‖ $-$ 0 $+$
$\ln(x)-1$	‖ $-$ | $-$
$\left(\ln(x)-1\right)\times\left(\ln(x)+1\right)$	‖ $+$ 0 $-$

Tableau de variations:

x	0 $\quad e^{-1}$ $\quad 1$
$f'(x)$	‖ $+$ 0 $-$
$f(x)$	‖ $0\nearrow$ $f(0)=\dfrac{4}{e}$ $\searrow 1$

2)a) Graphiquement: l'aire du triangle $O\,N_{0,2}\,P_{0,2}\approx\dfrac{0,52\times 2,6}{2}\approx 0,676$ u.a

2)b) La fonction g définie sur $]0\ ;1]$ par : $g(x)=\ln(x)$ est dérivable sur cet intervalle et $g'(x)=\dfrac{1}{x}$

L'équation de la tangente est:

$$y=g'(0,2)\ (x-0,2)+g(0,2)=\frac{1}{0,2}\ (x-0,2)+\ln(0,2)=5\,(x-0,2)+\ln(0,2)$$

$$y=5x-1+\ln(0,2)$$

2)c) Aire du triangle $O\,N_{0,2}\,P_{0,2}$:

$P_{0,2}\left(0\ ;\ln(0,2)-1\right)$

$N_{0,2}\left(\dfrac{1-\ln(0,2)}{5}\ ;0\right)$

$$A_{ON_{0,2}P_{0,2}}=\frac{O\,N_{0,2}\times O\,P_{0,2}}{2}=\frac{\left|\dfrac{1-\ln(0,2)}{5}\times\left(\ln(0,2)-1\right)\right|}{2}$$

$$A_{ON_{0,2}P_{0,2}}=\frac{\left(1-\ln(0,2)\right)^2}{10}$$

3) $A(a)=\dfrac{f(a)}{2}$, d'après le tableau de la fonction f, l'aire est donc maximale pour $a=e^{-1}$ et vaut en unités d'aire:

$$A\left(e^{-1}\right)=\frac{f\left(e^{-1}\right)}{2}=e^{-1}\left(1-\ln\left(e^{-1}\right)\right)=\frac{1}{e}\left(1-\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)=\frac{1}{e}\times 2=2\,e^{-1}$$

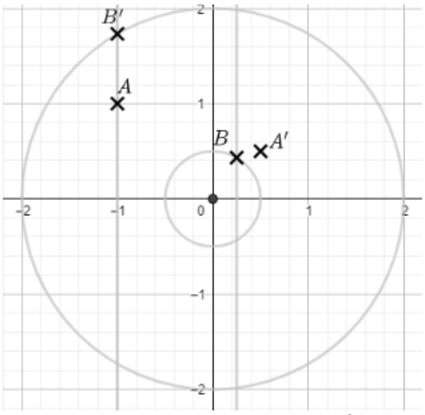
Exercice 2:

1)a) $z_{(A')}=\dfrac{1}{z_A}=\dfrac{-1}{-1+i}=\dfrac{-(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=\dfrac{1+I}{2}$

1)b) $z_{(B')}=\dfrac{1}{z_B}=\dfrac{-1}{\dfrac{1}{2}\times e^{\frac{i\pi}{3}}}=-2\times e^{\frac{-i\pi}{3}}$ avec $-1=e^{i\pi}$

D'où $z_{(B')}=e^{i\pi}\times 2\times e^{\frac{-i\pi}{3}}=2\times e^{i\frac{3\pi-\pi}{3}}=2\times e^{i\frac{2\pi}{3}}$

1)c) Figure:



2)a) $z' = \dfrac{-1}{r\,e^{i\theta}} = \dfrac{-1}{r} \times e^{-i\theta} = \dfrac{e^{i\pi}}{r} \times e^{-i\theta} = \dfrac{1}{r} \times e^{i(\pi-\theta)}$

2)b) $\mathbf{OM} < 1$ car le point M, distinc de O, appartient au disque de centre O et de rayon 1

$\mathbf{OM} = \sqrt{x^2+y^2} < 1$

Le point M' a pour affixe $z' = \dfrac{-1}{z}$ donc $z' = -\dfrac{1}{x+iy} = -\dfrac{(x-iy)}{x^2+y^2} = -\dfrac{x}{x^2+y^2} + i\,\dfrac{y}{x^2+y^2}$

D'où $\mathbf{OM'} = \sqrt{\left(\dfrac{-x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}} = \sqrt{\dfrac{1}{x^2+y^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

On sait que $\sqrt{x^2+y^2} < 1$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} > 1$

Conclusion: $\mathbf{OM'} > 1$, le point M' est à l'extérieur de ce disque.

3)a) Cercle de centre K d'affixe $z_K = \dfrac{-1}{2}$ et de rayon $\mathbf{R} = \dfrac{1}{2}$

Equation: $(x-x_K)^2 + (y-y_K)^2 = \mathbf{R}^2$ soit $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + (y-0)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2+x+\dfrac{1}{4}+y^2 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x^2+x+y^2 = 0$

3)b) Forme algébrique de z' :

On a vu question 2)b) $z' = -\dfrac{x}{x^2+y^2} + i\,\dfrac{y}{x^2+y^2}$

3)c) $x^2+x+y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 = -x$

On remplace: $z' = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + i\,\dfrac{y}{x^2+y^2} = 1 + i\,\dfrac{y}{x^2+y^2}$

M' appartient à la droite d'équation $x = 1$

Exercice 3:

Partie A:

1) La droite d est orthogonale au plan $\mathbf{P}$.

Elle est donc orthogonale à toutes les droites de ce plan, en particulier à la droite $(\mathbf{AC})$.

Le triangle $\mathbf{ABC}$ est rectangle en $\mathbf{A}$: donc la droite $(\mathbf{AC})$ est perpendiculaire à la droite $(\mathbf{AB})$.

Par construction les droites $(\mathbf{AB})$ et d sont sécantes.

La droite $(\mathbf{AC})$ est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan $(\mathbf{BAD})$.

Elle est donc orthogonale à ce plan.

2) ABCD est un tétraèdre dont les faces sont les triangles ABC, ABD, ACD et BDC.

- ABC est rectangle en A.
- Pour DBA et DBC : La droite $(\mathbf{BD})$ est perpendiculaire au plan P donc à toutes les droites de ce plan.

En particulier, $(\mathbf{BD})$ perpendiculaire à $(\mathbf{BA})$ et $(\mathbf{BC})$ donc les triangles DBA et DBC sont rectangles en B.

- Pour ACD : on sait que le triangle ABC est rectangle en A donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$(\mathbf{BD})$ est perpendiculaire au plan P donc à la droite $(\mathbf{AC})$, d'où: $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

Donc ACD est rectangle en A

Conclusion: ABCD est un tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles rectangles, c'est un ***bicoin*** .

3)a) Le triangle ABD est rectangle en B donc l'hypoténuse $[\mathbf{AD}]$ est plus longue que les deux autres côtés, donc: $\mathbf{AD} > \mathbf{AB}$ et $\mathbf{AD} > \mathbf{BD}$.

Le triangle ABC est rectangle en A donc $\mathbf{BC} > \mathbf{AB}$ et $\mathbf{BC} > \mathbf{AC}$

Le triangle BCD est rectangle en B donc $\mathbf{DC} > \mathbf{BD}$ et $\mathbf{DC} > \mathbf{BC}$

Le triangle ADC est rectangle en A donc $\mathbf{DC} > \mathbf{AD}$ et $\mathbf{DC} > \mathbf{AC}$

Conclusion: $\begin{cases} \mathbf{DC} > \mathbf{AD} > \mathbf{AB} \\ \mathbf{DC} > \mathbf{AC} \end{cases}$, l'arête $[\mathbf{CD}]$ est la plus longue arête du bicoin ABCD

3)b) Le point I est le milieu de l'hypoténuse $[\mathbf{DC}]$ du triangle ADC rectangle en A:

c'est donc le centre du cercle circonscrit à ce triangle et l'on peut écrire: $\mathbf{IA} = \mathbf{IC} = \mathbf{ID}$

Le point I est le milieu de l'hypoténuse $[\mathbf{DC}]$ du triangle BCD rectangle en B:

c'est donc le centre du cercle circonscrit à ce triangle et $\mathbf{IB} = \mathbf{IC} = \mathbf{ID}$

On peut donc écrire: $\mathbf{IA} = \mathbf{IB} = \mathbf{IC} = \mathbf{ID}$

Donc le point I est équidistant des $\mathbf{4}$ sommets.

Partie B:

1) vecteur directeur de d est: $\vec{u}\,(2\,;\,-2\,;\,1)$ mais ce vecteur est un vecteur normal de $\mathbf{P}$

Equation cartésienne de $\mathbf{P}$ est: $a\,x+b\,y+c\,z+d=2\,x-2\,y+1\,z+d=0$

Pour trouver: le point $\mathbf{A}$ appartient à ce plan donc: $2\,x_{\mathrm{A}}-2\,y_{\mathrm{A}}+1\,z_{\mathrm{A}}+d=0$

$2\times3-2\times1-5+d=0 \iff 6-7+d=0 \iff d=1$

Equation du plan $\mathbf{P}$: $2\,x-2\,y+z+1=0$

2) $\begin{cases} x=1+2\,t \\ y=9-2\,t \\ z=-3+t \\ 2\,x-2\,y+z+1=0 \end{cases} \iff 2\,(1+2\,t)-2\,(9-2\,t)+(-3+t)+1=0 \iff 9\,t-18=0 \iff t=2$

$t=2$ $\begin{cases} x=1+4=5 \\ y=9-4=5 \\ z=-3+2=-1 \end{cases}$ le point d'intersection est $\mathbf{B}\,(5\,;\,5\,;\,-1)$

3) $\mathbf{C}\,(7\,;\,3\,;\,-9)$: $2\,x_{\mathrm{C}}-2\,y_{\mathrm{C}}+1\,z_{\mathrm{C}}+1=14-6-9+1=15-15=0$

Donc le point $\mathbf{C}$ appartient au plan $\mathbf{P}$

Le triangle ABC est rectangle isocèle:

$\mathbf{A\,B}=\sqrt{\left(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}}\right)^2+\left(y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}}\right)^2+\left(z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}\right)^2}=\sqrt{36}$

$\mathbf{A\,C}=\sqrt{\left(x_{\mathrm{C}}-x_{\mathrm{A}}\right)^2+\left(y_{\mathrm{C}}-y_{\mathrm{A}}\right)^2+\left(z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}\right)^2}=\sqrt{36}$

$\mathbf{A\,B}=\mathbf{A\,C}$, le triangle est isocèle en A

$\mathbf{C\,B}=\sqrt{\left(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{C}}\right)^2+\left(y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{C}}\right)^2+\left(z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{C}}\right)^2}=\sqrt{72}$

De plus, on a:

$\mathbf{A\,B}^2+\mathbf{A\,C}^2=36+36=72$ et $\mathbf{C\,B}^2=72$

Donc d'après la réciproque de Pythagore:le triangle ABC est rectangle en A

Conclusion: Le triangle ABC est un triangle isocèle et rectangle en A.

4)a) Les points $\mathbf{M}$ et $\mathbf{B}$ appartiennent à la droite (d) et d est orthogonale au plan P et donc à toutes les droites de ce plan: en particulier, à la droite (AB).

Ainsi le triangle ABM est rectangle en B.

4)b) $\mathbf{M}\,(2\,t+1\,;\,-2\,t+9\,;\,t-3)$: $\mathbf{B\,M}=\sqrt{(2\,t+1-5)^2+(-2\,t+9-5)^2+(t-3+1)^2}$

$\mathbf{B\,M}=\sqrt{9\,t^2-36\,t+36}$

Comme $\mathbf{A\,B}>0$ et $\mathbf{B\,M}>0$ on a: $\mathbf{A\,B}=\mathbf{B\,M} \iff \mathbf{A\,B}^2=\mathbf{B\,M}^2 \iff 36=9\,t^2-36\,t+36$

$9\,t^2-36\,t=0 \iff t^2-4\,t=0$

Le triangle ABM est isocèle en B si et seulement si le réel t vérifie l'équation : $t^2-4\,t=0$

4)c) $t^2-4\,t=t\,(t-4)=0$ donc soit $t=0$ soit $t=4$

Si $t=0$: $\mathbf{M_1}\,(1\,;\,9\,;\,-3)$

Si $t=4$: $\mathbf{M_2}\,(9\,;\,1\,;\,1)$

D'après les questions 4)a) et 4)b) les triangles $\mathbf{A\,B\,M_1}$ et $\mathbf{A\,B\,M_2}$ sont isocèles et rectangles en B.

Partie C:

On appelle $\mathbf{I}$ le milieu de l'arête $[\mathbf{C\,D}]$, $\mathbf{I}$ a pour coordonnées:

$\mathbf{I}\begin{cases} \dfrac{x_{\mathrm{C}}+x_{\mathrm{D}}}{2}=\dfrac{7+9}{2}=8 \\ \dfrac{y_{\mathrm{C}}+y_{\mathrm{D}}}{2}=\dfrac{1+3}{2}=2 \\ \dfrac{z_{\mathrm{C}}+z_{\mathrm{D}}}{2}=\dfrac{1-9}{2}=-4 \end{cases}$ donc $\mathbf{I}\,(8\,;\,2\,;\,-4)$

On sait que le tétraédre ABCD est un bicoin et que $\mathbf{I}$ est équidistant des $\mathbf{4}$ sommets de ce bicoin

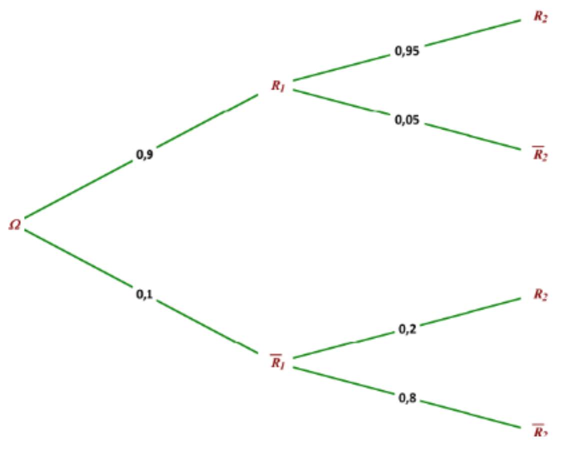
$\mathbf{I}$ est le centre de la sphère cherchée.

Le rayon est :

$\mathbf{R}=\mathbf{I\,A}=\sqrt{\left(x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{I}}\right)^2+\left(y_{\mathrm{A}}-y_{\mathrm{I}}\right)^2+\left(z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{I}}\right)^2}=\sqrt{27}=3\,\sqrt{3}$

Exercice 4:

1)a) Arbre pondéré:



1)b) $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = 0{,}9 \times 0{,}95 = 0{,}855$

1)c) $P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(\bar{R_1} \cap R_2) = 0{,}855 + P(\bar{R_1}) \times P_{\bar{R_1}}(R_2) = 0{,}855 + 0{,}1 \times 0{,}2$

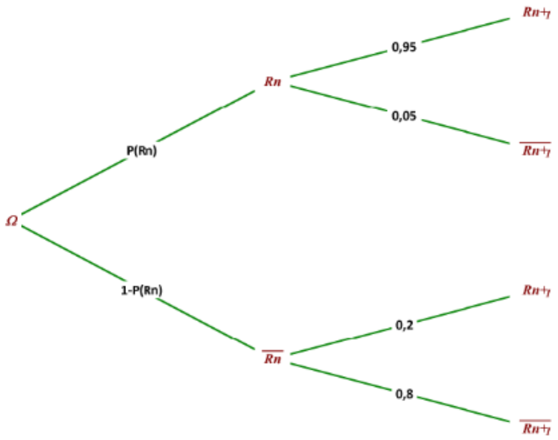
Donc $P(R_2) = 0{,}855 + 0{,}02 = 0{,}875$

1)d) On sait que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine

On veut calculer: $P_{R_2}(\bar{R_1}) = \dfrac{P(\bar{R_1} \cap R_2)}{P(R_2)} = \dfrac{0{,}1 \times 0{,}2}{0{,}875} \approx 0{,}023$ (à 10^{-3})

Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, la probabilité ***qu'il n'ait pas rapporté*** la bouteille de son panier de la première se

2)a) Arbre pondéré:



2)b) $P(R_{n+1}) = P(R_n \cap R_{n+1}) + P(\bar{R_n} \cap R_{n+1}) = r_{n+1}$

$r_{n+1} = P(R_n) \times P_{Rn}(R_{n+1}) + P(\bar{R_n}) \times P_{\bar{R_n}}(R_{n+1}) = 0{,}95\ r_n + 0{,}2\ (1 - r_n) = 0{,}95\ r_n - 0{,}2\ r_n + 0{,}2$

$r_{n+1} = 0{,}75\ r_n + 0{,}2$

2)c) $r_n = 0{,}1 \times 0{,}75^{n-1} + 0{,}8$

Initialisation:

$r_1 = 0{,}1 \times 0{,}75^0 + 0{,}8 = 0{,}1 + 0{,}8 = 0{,}9$ et $P(R_1) = 0{,}9$: la propriété est vraie au rang $n = 1$

Hérédité:

On suppose que la propriété est vraie au rang n et on doit montrer qu'elle est vraie au rang $n+1$,c'est à dire:

$r_{n+1} = 0{,}1 \times 0{,}75^n + 0{,}8$?

$r_{n+1} = 0{,}75\ r_n + 0{,}2 = 0{,}75\ (0{,}1 \times 0{,}75^{n-1} + 0{,}8) + 0{,}2 = 0{,}1 \times 0{,}75^n + 0{,}6 + 0{,}2$

$r_{n+1} = 0{,}1 \times 0{,}75^n + 0{,}8$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$

Conclusion: Pour tout $n \geqslant 1$; $r_n = 0{,}1 \times 0{,}75^{n-1} + 0{,}8$

2)d) $r_n = 0{,}1 \times 0{,}75^{n-1} + 0{,}8$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}75^{n-1} = 0$ car $0 < q = 0{,}75 < 1$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 0{,}8$

Sur le long terme, la probabilité que le client ramène la bouteille du panier est $0{,}8$.