Correction: Liban Mai 2019

Exercice 1:

1) $u(x) = 3 \ln(x) - 2x + 1$ avec $x \in]0 ; +\infty[$

u est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $u'(x) = \dfrac{3}{x} - 2 = \dfrac{3-2x}{x}$

Equation de la tangente au point d'abscisse $a = 1$:

$y = u'(1)(x-1) + u(1)$ avec $\begin{cases} u(1) = -1 \\ u'(1) = 1 \end{cases}$

$y = 1(x-1) - 1 = x - 2$

Equation réduite de la tangente est: $y = x - 2$

Affirmation 1: Vraie

2) $f(x) = \dfrac{1}{e^2} \ln(x)$ avec $x \in [e ; e^2]$

La fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[e ; e^2]$ car $x > e \Leftrightarrow \ln(x) > \ln(e) \Leftrightarrow \ln(x) > 1$

La fonction $x \longrightarrow x \ln(x) - x$ est une primitive de la fonction $x \longrightarrow \ln(x)$

Donc une primitive de la fonction f est : $F(x) = \dfrac{1}{e^2}(x \ln(x) - x)$

$$\int_e^{e^2} f(x)\,dx = [F(x)]_e^{e^2} = F(e^2) - F(e) = \frac{1}{e^2}\left(e^2 \ln(e^2) - e^2\right) - \frac{1}{e^2}(e \ln(e) - e)$$

$$\int_e^{e^2} f(x)\,dx = \frac{1}{e^2}\left(2e^2 - e^2\right) - \frac{1}{e^2}(e - e) = \frac{1}{e^2} \times e^2 = 1$$

La fonction f est une fonction de densité sur $[e ; e^2]$

Affirmation 2: Vraie

3) $g(x) = 3e^{-2x+1}$ avec $x \in \mathbb{R}$

Si G est une primitve de g alors: $G'(x) = g(x)$

La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$

$G(x) = -6e^{-2x+1} + 6$

D'où $G'(x) = -6\left(-2e^{-2x+1}\right) = 12e^{-2x+1} \neq 3e^{-2x+1}$

Affirmation 3: Fausse

4) Soit la fonction h définie sur $I = [-8 ; -0,5]$ par: $h(x) = \dfrac{4x+1}{x^2}$

La fonction h est dérivable deux fois sur l'intervalle $[-8 ; -0,5]$ comme quotients de 2 fonctions dérivables sur I

Le dénominateur étant différent de 0 sur I

$$h'(x) = \frac{4x^2 - 2x(4x+1)}{x^4} = \frac{4x^2 - 8x^2 - 2x}{x^4} = \frac{x(-4x-2)}{x^4} = \frac{-2-4x}{x^3}$$

$$h''(x) = \frac{-4x^3 - 3x^2(-4x-2)}{x^6} = \frac{-4x^3 + 12x^3 + 6x^2}{x^6} = \frac{8x^3 + 6x^2}{x^6} = \frac{2x^2(4x+3)}{x^6}$$

$$h''(x) = 2 \times \frac{4x+3}{x^4} = \frac{2}{x^4} \times (4x+3)$$

Comme $\dfrac{2}{x^4} > 0$, le signe de $h''(x)$ dépend du signe de $(4x+3)$

x	-8	$-0,75$	$-0,5$
$4x+3$	$-$	0	$+$

car $4x + 3 = 0 \Leftrightarrow 4x = -3 \Leftrightarrow x = \dfrac{-3}{4} = -0,75$

Conclusion: $h''(x) \leqslant 0$ si $x \in [-8 ; -0,75]$

Donc la fonction h est concave sur l'intervalle $[-8 ; -0,75]$

Affirmation 4: Vraie

Exercice 2:

Partie 1: Modèle 1

1) Suite géométrique de raison $q = 1,63$ et de premier terme $u_0 = 97$

$u_1 = q \times u_0 = 1,63 \times 97 = 158,11$

$u_2 = q \times u_1 = 1,63 \times 158,11 = 257,7193$ soit 258 chenilles (arrondi à l'unité)

2) Expression de u_n en fonction de n: $u_n = u_0 \times q^n$ d'où $u_n = 97 \times (1,63)^n$

3) Calculons: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{97 \times 1,63^{n+1}}{97 \times 1,63^n} = \dfrac{1,63 \times 1,63^n}{1,63^n} = 1,63 > 1$

Comme $u_0 = 97$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, la suite (u_n) est croissante.

4) Le 12 juin 2018, soit $n = 11$ jours après le 1^{er} juin 2018, le nombre de chenilles sera :

$u_{11} = u_0 \times q^{11} = 97 \times 1,63^{11} \approx 20933,19$ soit il y aura 20900 chenilles le 12 juin 2018 ***(arrondi à la centaine)***

Partie 2: Modèle 2

1) $v_0 = 97$ et $v_{n+1} = 0,91\, v_n + 93$

On admet $v_n = \dfrac{1}{3}\left(-2809 \times 0,91^n + 3100\right)$

$n=12$ d'où $v_{12}=\frac{1}{3}\left(-2809\times 0{,}91^{12}+3100\right)\approx 731{,}389$ soit 700 chenilles (arrondi à la centaine).

2) $v_{n+1}-v_n=\frac{-2809}{3}\left(0{,}91^{n+1}-0{,}91^{n}\right)=\frac{-2809\times 0{,}91^{n}(0{,}91-1)}{3}$

$v_{n+1}-v_n=\frac{-2809\times 0{,}91^{n}}{3}(-0{,}09)=0{,}03\times 2809\times 0{,}91^{n}=84{,}27\times 0{,}91^{n}>0$

La suite $\left(v_n\right)$ est croissante

Partie 3: comparaison des différents modèles

Modèle 1: $u_0=97$, $u_1=158{,}11$ et $u_2=257{,}7193$

Modèle 2: $v_0=97$, $v_1=0{,}91\times 97+93=181{,}27$ et $u_2=0{,}91\times 181{,}27+93=257{,}9557$

Pour les premières valeurs, les valeurs du modèle 2 semblent plus proches des valeurs estimées

Modèle 2 semble être adapté.

2)a) $v_n\geqslant 1000$

$v_n=\frac{1}{3}\left(-2809\times 0{,}91^{n}+3100\right)\geqslant 1000$

$\left(-2809\times 0{,}91^{n}+3100\right)\geqslant 3000 \Leftrightarrow -2809\times 0{,}91^{n}\geqslant 100 \Leftrightarrow 0{,}91^{n}\leqslant \frac{100}{2809}$

$\Leftrightarrow \ln \mathrm{O}\ ,91^{n}\leqslant \ln\left(\frac{100}{2809}\right) \Leftrightarrow n\ln(0{,}91)\leqslant \ln\left(\frac{100}{2809}\right) \Leftrightarrow n\geqslant \frac{\ln\left(\frac{100}{2809}\right)}{\ln(0{,}91)}$

$\frac{\ln\left(\frac{100}{2809}\right)}{\ln(0{,}91)}=35{,}36623$

Donc $n\geqslant 36$

2)b) Dans 36 jours, selon le modèle 2, il y aura au moins 1000 chenilles, soit le 1 juin 2018 + 36 = ***07 juillet 2018*** (attention, il y a 30 jours au mois de juin)

Exercice 3:

1) Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[-4\ ;\ 10]$ par: $f(x)=1+\left(-4x^2-10x+8\right)e^{-0{,}5x}$

$f'(x)=(-8x-10)e^{-0{,}5x}-0{,}5e^{-0{,}5x}\times\left(-4x^2-10x+8\right)$

$f'(x)=e^{-0{,}5x}\times\left(-8x-10+2x^2+5x-4\right)=\left(2x^2-3x-14\right)\times e^{-0{,}5x}$

2) Tableau de variations:

$e^{-0{,}5x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de : $\left(2x^2-3x-14\right)$

$\Delta=b^2-4ac=121=11^2$ les solutions sont : $x_1=-2$ et $x_2=\frac{7}{2}$

x	-4		-2		$\frac{7}{2}$		10
$2x^2-3x-14$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	-4		-2		$\frac{7}{2}$		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-4)<0$	$\nearrow$	$f(-2)>0$	$\searrow$	$f\left(\frac{7}{2}\right)<0$	$\nearrow$	$f(10)<0$

avec $\begin{cases} f(-4)=1-16e^2<0 \\ f(-2)=1+12e>0 \\ f\left(\frac{7}{2}\right)=1-76e^{-1{,}75}<0 \\ f(10)=1-492e^{-5}<0 \end{cases}$

3)a) La fonction f est continue et croissante sur l'intervalle $[-4\ ;\ -2]$

Comme $\begin{cases} f(-4)=1-16e^2<0 \\ f(-2)=1+12e>0 \end{cases}$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation

$f(x)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-4\ ;\ -2]$

3)b)

	m	signe de p	a	b	b-a	$b-a>10^{-1}$
Initialisation			-4	-2	2	**Vrai**
Après 1^{er} passage dans la boucle	-3	**négatif**	-4	-3	1	**Vrai**
Après 2^{nd} passage dans la boucle	-3,5	**positif**	-3,5	-3	0,5	**Vrai**

3)c) A la fin de l'exécution de l'algorithme, $a=-3{,}1875$ et $b=-3{,}125$

L'équation $f(x)=0$ est comprise entre $-3{,}1875$ et $-3{,}125$

4) La valeur moyenne est:

$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{10-(-4)}\int_{-4}^{10} f(x)\,dx=\frac{1}{14}\left(F(10)-F(-4)\right)$

$m=\frac{1}{14}\left(10+1408e^{-5}-\left(-4+8e^2\right)\right)=\frac{1}{14}\left(14+1408e^{-5}-8e^2\right)$

$m\approx -2{,}54$ (arrondi à 10^{-2})

Exercice 4:

Partie A:

1) $\mathbf{300}$ tirages aléatoires, dentiques et indépendants

$\mathbf{2}$ issues possibles (épreuve de Bernoulli): réussite "la personne choisie est respectueuse de son environnement", notée $\mathbf{S}$ avec $p=\mathbf{072}$ et échec, notée $\mathbf{S}^{-}$ avec

$\mathbf{X}$ est la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes respectueuses de leur environnement

$\mathbf{X}$ suit une loi binomiale de paramètres $n=\mathbf{300}$ et $p=\mathbf{0,72}$, notée $\mathbf{B}\ (\mathbf{300}\ ;\ \mathbf{0,72})$

2) On calcule:

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{X}=\mathbf{190}\right)=\binom{300}{190}\times 0,72^{190}\times(1-0,72)^{300-190}\approx 0,0002$$

3) On calcule:

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{X}\geqslant 220\right)=1-\mathbf{P}\left(\mathbf{X}<220\right)=1-\mathbf{P}\left(\mathbf{X}\leqslant 219\right)$$

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{X}\geqslant 220\right)\approx 0,3291$$

Partie B:

1) Signe de : $\left(2x^2-7x-4\right)$

$\Delta=b^2-4ac=81=9^2$ les solutions sont : $x_1=4$ et $x_2=\frac{-1}{2}$

x	$-\infty$ $\qquad -\frac{1}{2}$ $\qquad 4$ $\qquad +\infty$
$2x^2-7x-4$	$+\quad 0\quad -\quad 0\quad +$

$2x^2-7x-4\geqslant 0$ alors $x\in\left]-\infty\ ;-\frac{1}{2}\right]\cup[4\ ;+\infty[$

2) $\mathbf{Y}$ suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$

$$\mathbf{P}\left(4\leqslant\mathbf{Y}\leqslant 10\right)=\frac{10-4}{10-0}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}=0,6$$

Partie C:

1)a) $\mathbf{Z}$ suit une loi normale d'espérance $\mu=2,3$ et d'écart type $\sigma=0,11$

A la calculatrice on trouve:

$$\mathbf{P}\left(2,18\leqslant\mathbf{Z}\leqslant 2,42\right)\approx 0,72$$

1)b) Cours: $\mathbf{X}$ suit une loi normale $\mathbf{N}\left(\mu\ ,\sigma^2\right)$ on a: $\mathbf{P}\left(\mathbf{X}<\mu\right)=0,5=\mathbf{P}\left(\mathbf{X}>\mu\right)$

De plus pour tout réel a tel que $a<\mu$

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{X}>a\right)=\mathbf{P}\left(a<\mathbf{X}<\mu\right)+0,5$$

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{Z}\geqslant 2,25\right)=\mathbf{P}\left(2,25<\mathbf{Z}<2,3\right)+0,5\approx 0,68$$

2) $\mathbf{P}\left(2,18\leqslant\mathbf{Z}\leqslant 2,42\right)\approx 0,95$

On pose: $\mathbf{X}=\frac{\mathbf{Z}-\mu}{\sigma}$, $\mathbf{X}$ suit une loi normale centrée réduite, notée $\mathbf{N}\ (0\ ;1)$

$$\mathbf{P}\left(\frac{2,18-\mu}{\sigma}\leqslant\frac{\mathbf{Z}-\mu}{\sigma}\leqslant\frac{2,42-\mu}{\sigma}\right)=\mathbf{P}\left(\frac{-0,12}{\sigma}\leqslant\mathbf{X}\leqslant\frac{0,12}{\sigma}\right)=1-2\,\mathbf{P}\left(\mathbf{X}\geqslant\frac{0,12}{\sigma}\right)=0,95$$

Donc $\mathbf{P}\left(\mathbf{X}\geqslant\frac{0,12}{\sigma}\right)=\frac{1-0,95}{2}=0,025$

A la calculatrice, on obtient:

$\frac{0,12}{\sigma}\approx 1,96$ d'où $\sigma\approx 0,06$