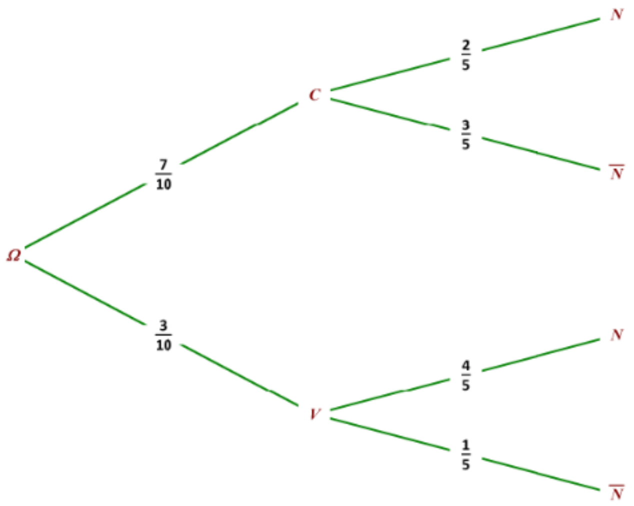
Correction: Nouvelle Calédonie mars 2019

Exercice 1:

Partie A:

1) Arbre pondéré:



2) $\mathbf{P(C \cap N) = P(C) \times P_C(N) = \frac{7}{10} \times \frac{2}{5} = \frac{7}{25} = 0{,}28}$

3) Probabilités totales:

$\mathbf{P(N) = P(C \cap N) + P(L \cap N) = P(C) \times P_C(N) + P(L) \times P_L(N)}$

$\mathbf{P(N) = 0{,}28 + \frac{3}{10} \times \frac{4}{5} = 0{,}28 + \frac{6}{25} = 0{,}28 + 0{,}24}$

$\mathbf{P(N) = 0{,}52}$

4) On veut calculer $\mathbf{P_{N^-}(V) = ?}$

$$\mathbf{P_{N^-}(V) = \frac{P\left(N^- \cap V\right)}{P\left(N^-\right)} = \frac{P(V) \times P_V\left(N^-\right)}{1 - P(N)} = \frac{\frac{3}{10} \times \frac{1}{5}}{1 - 0{,}52} = \frac{\frac{3}{50}}{0{,}48} = \frac{0{,}06}{0{,}48} = 0{,}125}$$

La probabilité que Fabien ait commencé sa séance d'entraînement par du vélo sacahant qu'il n'a pas fait natation est : $\mathbf{0{,}125}$

Partie B:

La variable aléatoire $\mathbf{T}$ suit la loi normale d'espérance $\mu = 2{,}5$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}25$

1) $\mathbf{P\left(T \geqslant 3\right) \approx 0{,}023}$, valeur trouvée à la calculatrice

Conclusion: $\mathbf{2{,}3\ \%}$ des concurrents mettront plus de trois heures pour terminer toutes les épreuves .

2) $\mathbf{P\left(2 \leqslant T \leqslant 3\right) \approx 0{,}954}$, valeur trouvée à la calculatrice

3) $\mathbf{P\left(T \leqslant t\right) = 0{,}75}$ à la calcutrice on obtient $t \approx 2{,}669$ or $0{,}669 \times 60 = 40{,}14$ minutes donc $t = 2\ h\ 40\ \ \mathbf{min}$

Conclusion: Les $\frac{3}{4}$ des concurrents mettront environ $\mathbf{2\ h\ 40\ \ min}$ pour terminer le triathlon.

Partie C:

1) Intervalle de fluctuation:

$n = 60 \geqslant 30$ et $p = 0{,}5$; $n \times p = 60 \times 0{,}50 = 30 \geqslant 5$ et $n \times (1 - p) = 60 \times 0{,}50 = 30 \geqslant 5$

$$\mathbf{I} = \left[\ p - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}}\ \right] = \left[\ 0{,}5 - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}5 \times 0{,}5}}{\sqrt{60}}\ ;\ 0{,}5 + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}5 \times 0{,}5}}{\sqrt{60}}\ \right]$$

$\mathbf{I} \approx [\,0{,}373\ ;\ 0{,}627\,]$

2)b) La fréquence observée est: $f = \frac{25}{60} = \frac{5}{12} \approx 0{,}417$

On constate que $f \in \mathbf{I}$, on ne remet pas en question l'affirmation de l'organisateur.

Exercice 2:

1) A la fin du mois de janvier $\mathbf{280}$ voitures ont été louées, $u_1 = 0{,}9 \times u_0 + 42 = 0{,}9 \times 280 + 42$

donc $u_1 = 294$

$\mathbf{294}$ voitures ont été louées avec ce système de location au mois de février.

2)a) $v_n = u_n - 420$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 420 = 0{,}9 \times u_n + 42 - 420 = 0{,}9 \times u_n - 378 = 0{,}9 \times \left[\ u_n - \frac{378}{0{,}9}\ \right] = 0{,}9 \times \left[\ u_n - 420\ \right]$$

Donc $v_{n+1} = 0{,}9 \times v_n$

La suite $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique de raison $q = 0{,}9$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 420 = 280 - 420 = -140$

2)b) Expression de v_n en fonction de n: $v_n = v_0 \times q^n = -140 \times (0{,}9)^n$

Expression de u_n en fonction de n: $v_n = u_n - 420 \iff u_n = v_n + 420$

D'où $u_n = 420 - 140 \times (0{,}9)^n$

3) $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$ car $0 < q < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 420$

Au bout d'un grand nombre de mois, **420** voitures seront louées chaque mois

Comme la commune ne dispose que de **380** voitures, cette dernière va devoir investir dans de nouvelles voitures.

4)a) Algorithme:

Variables:	**N entier et U réel**
Initialisation:	**N prend la valeur 0**
	U prend la valeur 280
Traitement:	**Tant que U $\leqslant$ 380**
	U prend la valeur $0{,}9 \times U + 42$
	N prend la valeur N + 1
	Fin Tant que
Sortie:	**Afficher N**

4)b) La variable **N** contient la valeur **N = 12** correspondant au nombre de mois nécessaire pour dépasser 380: $u_{11} \approx 376{,}07$ et $u_{12} \approx 380{,}46$

4)c) $2019 + 12\ mois = 2020$: donc en janvier **2020** , la commune devra augmenter son parc de voitures.

5) $-140 \times 0{,}9^n + 420 > 380 \Leftrightarrow -140 \times 0{,}9^n > -40 \Leftrightarrow 0{,}9^n < \frac{-40}{-140} = \frac{2}{7}$

$\Leftrightarrow \ln 0{,}9^n < \ln\left(\frac{2}{7}\right) \Leftrightarrow n \ln(0{,}9) < \ln\left(\frac{2}{7}\right)$ or $ln(0{,}9) < 0$

Donc $n > \dfrac{\ln\left(\frac{2}{7}\right)}{\ln(0{,}9)}$ avec $\dfrac{\ln\left(\frac{2}{7}\right)}{\ln(0{,}9)} \approx 11{,}89$

Comme $n \in \mathbb{N}$, les solutions seront les entiers supérieurs ou égaux à **12** , on retrouve le résultat de la question 4)b).

Exercice 3:

1) **X** suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}3$ à la calculatrice, on trouve: $P(X \geqslant 1) \approx 0{,}972$

Réponse A

2) **T** suit une loi uniforme sur l'intervalle $[10\ ;\ 40]$: $P(15 \leqslant T \leqslant 25) = \frac{25-15}{40-10} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

Réponse B

3) $1 + 1{,}2 + 1{,}2^2 + \cdot\ \cdot + 1{,}2^{10} = 1{,}2^0 + 1{,}2 + 1{,}2^2 + \cdot\ \cdot + 1{,}2^{10} = ?$

Suite géométrique de raison $q = 1{,}2$ et de 1^{er} terme **1**

Il y a **11** termes

$1 + 1{,}2 + 1{,}2^2 + ?\cdot?\cdot? + 1{,}2^{10} = \frac{1 - 1{,}2^{11}}{1 - 1{,}2} = 32{,}15042$

Réponse D

4) $g(x) = x^2(2\ln(x) - 5) + 2$, pour tout $x \in [0{,}1\ ;\ 10]$

$g'(x) = 2x(2\ln(x) - 5) + x^2 \times \frac{2}{x} = 4x\ln(x) - 10x + 2x = 4x\ln(x) - 8x = 4x(\ln(x) - 2)$

d'où $g''(x) = 4(\ln(x) - 2) + 4x \times \frac{1}{x} = 4\ln(x) - 8 + 4 = 4\ln(x) - 4 = 4(\ln(x) - 1)$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow \ln(x) = \ln(e) \Leftrightarrow x = e$

$g''(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geqslant \ln(e) \Leftrightarrow x \geqslant e$

$g''(x) \geqslant 0$ si $x \in [e\ ;\ 10]$ et $g''(x) < 0$ si $x \in [0{,}1\ ;\ e[$

Conclusion:

x	$0{,}1$ e 10
$g''(x)$	$-$ 0 $+$

La fonction est ***concave*** sur $[0{,}1\ ;\ e]$ et ***convexe*** sur $[e\ ;\ 10]$

Réponse D

Exercice 4:

Partie A: lectures graphiques

1) $f(0) = -11$; $f'(0) = \frac{11}{5}$ coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse $a = 0$

(attention aux unités: on avance de 5 et on monte de 11) et $f'(11) = 0$ (car tangente horizontale)

2) Graphiquement on constate que $f(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in [0\ ;\ 3{,}2]$

Comme **F** est une primitive de f alors $F'(x) = f(x)$ on en déduit que $F'(x) \leqslant 0$ sur cet intervalle et donc **F** est décroissante

Affirmation fausse

Partie B: étude d'une fonction

1) La fonction f est définie sur $[0\ ;\ 30]$ par: $f(x) = (x^2 - 11) \times e^{-0{,}2x}$

(forme: $u \times v$ et $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$) donc $\begin{cases} u(x) = x^2 - 11 \\ v(x) = e^{-0{,}2x} \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = 2x \\ v'(x) = -0{,}2 \times e^{-0{,}2x} \end{cases}$

$f'(x) = 2x \times e^{-0{,}2x} - 0{,}2\, e^{-0{,}2x} \times (x^2 - 11) = 2x \times e^{-0{,}2x} - 0{,}2\, x^2\, e^{-0{,}2x} + 2{,}2\, e^{-0{,}2x}$

$f'(x) = (2x - 0{,}2\, x^2 + 2{,}2)\, e^{-0{,}2x}$: on retrouve lerésultat instruction obtenue en ligne 2 du logiciel

2) $f'(x) = (2x - 0{,}2\, x^2 + 2{,}2)\, e^{-0{,}2x}$ on sait que $e^{-0{,}2x} > 0$

donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de: $-0{,}2\, x^2 + 2x + 2{,}2$

On a $\Delta = b^2 - 4ac = \frac{144}{25} = \left(\frac{12}{5}\right)^2$ on obtient: $x_1 = -1$ et $x_2 = 11$

x	∞ $\quad -1 \qquad 11 \quad +\infty$
$-0{,}2x^2+2x+2{,}2$	$- \quad 0 \quad + \quad 0 \quad -$

Tableau de variations

x	0	11	30
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	$f(0)<0 \nearrow$	$f(11)>0$	$\searrow f(30)>0$

avec $\begin{cases} f(0) = -11 \\ f(11) \approx 12{,}188 \\ f(30) \approx 2{,}204 \end{cases}$

3) Sur l'intervalle $[11 ; 30]$ la fonction est continue et strictement décroissante

$f(11) > 0$ et $f(30) > 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[11 ; 30]$

Sur l'intervalle $[0 ; 11]$ la fonction est continue et strictement croissante

$f(0) < 0$ et $f(11) > 0$ donc l'équation $f(x) = 0$,d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, admet une unique solution α sur $[0 ; 11]$

Conclusion: L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0 ; 30]$

A la calculatrice on trouve: $\alpha \approx 3{,}32$ à 10^{-2} près

4) D'après le logiciel, une primitive de f est: $F(x) = \left(-5x^2 - 50x - 195\right) e^{-0{,}2x}$

$I = \int_{10}^{20} f(x)\, dx = [F(x)]_{10}^{20} = F(20) - F(10) = 1195\, e^{-2} - 3195\, e^{-4}$

$I \approx 103{,}21$

Partie C: application économique

1) Le nombre $f(x)$ représente la quantité demandée exprimée en centaines de milliers d'objets

x le prix unitaire en euros

$f(15) = 214\, e^{-3} \approx 10{,}65$

Donc si le prix unitaire est de 15 euros, la demande sera de 1065000

2) La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[10 ; 20]$ est:

$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx = \frac{1}{20-10} \int_{10}^{20} f(x)\, dx = \frac{1}{10} \times I \approx 10{,}321$

Si le prix varie entre 10 et 20 euros la demande moyenne sera de: 1032100 objets.

3) $E(15) = \frac{f'(15)}{f(15)} \times 15 = \frac{-12{,}8\, e^{-3}}{214\, e^{-3}} \times 15 = \frac{-192}{214}$

$E(15) \approx -0{,}90$

Si le prix augmente de $1\ \%$ alors la demande diminue de $0{,}9\ \%$