Correction: Nouvelle Calédonie mars 2019

Exercice 1:

Partie A:

1)a) $\mathbf{X}$ variable aléatoire qui associe l'épaisseur du tube, $\mathbf{X}$ suit une loi normale d'espérance $\mu = 1{,}5$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}07$
Le tube est accepté: à la calculatrice, on trouve:
$\mathbf{P}(1{,}35 \leqslant \mathbf{X} \leqslant 1{,}65) \approx 0{,}968$ (à 10^{-3} près)

1)b) $\mathbf{Z}$ variable aléatoire définie par: $\mathbf{Z} = \dfrac{\mathbf{X}_1 - 1{,}5}{\sigma_1}$

$$\mathbf{P}(1{,}35 \leqslant \mathbf{Z} \leqslant 1{,}65) = \mathbf{P}\left(\frac{1{,}35 - 1{,}5}{\sigma_1} \leqslant \frac{\mathbf{X}_1 - 1{,}5}{\sigma_1} \leqslant \frac{1{,}65 - 1{,}5}{\sigma_1}\right) = \mathbf{P}\left(\frac{-0{,}15}{\sigma_1} \leqslant \frac{\mathbf{X}_1 - 1{,}5}{\sigma_1} \leqslant \frac{0{,}15}{\sigma_1}\right) = 0{,}98$$

On obtient:

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{Z} \leqslant \frac{-0{,}15}{\sigma_1}\right) + \mathbf{P}\left(\frac{-0{,}15}{\sigma_1} \leqslant \mathbf{Z} \leqslant \frac{0{,}15}{\sigma_1}\right) + \mathbf{P}\left(\mathbf{Z} \geqslant \frac{0{,}15}{\sigma_1}\right) = 1 \quad \text{or} \quad \mathbf{P}\left(\mathbf{Z} \leqslant \frac{-0{,}15}{\sigma_1}\right) = \mathbf{P}\left(\mathbf{Z} \geqslant \frac{0{,}15}{\sigma_1}\right)$$

D'où $2\,\mathbf{P}\left(\mathbf{Z} \geqslant \dfrac{0{,}15}{\sigma_1}\right) = 0{,}02$ soit $\mathbf{P}\left(\mathbf{Z} \geqslant \dfrac{0{,}15}{\sigma_1}\right) = 0{,}01$

A la calculatrice, on trouve: $\dfrac{0{,}15}{\sigma_1} \approx 2{,}326$ d'où $\sigma_1 \approx 0{,}064$ ("invNormale" puis choisir "DROIT")

2) Intervalle de fluctuation:
$n = 250 \geqslant 30$; $n \times p = 250 \times 0{,}02 = 5 \geqslant 5$ et $n \times (1-p) = 250 \times 0{,}98 = 245 \geqslant 5$

$$\mathbf{I} = \left[\, p - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}} \;;\; p + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}} \,\right] = \left[\, 0{,}02 - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}02 \times 0{,}98}}{\sqrt{250}} \;;\; 0{,}02 + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}02 \times 0{,}98}}{\sqrt{250}} \,\right]$$

$\mathbf{I} \approx [\,0{,}003 \;;\; 0{,}037\,]$

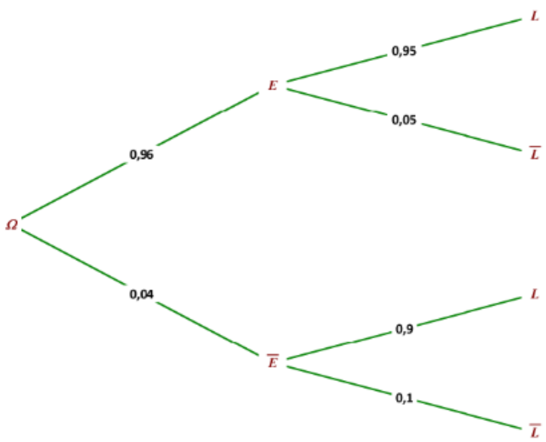
2)b) $f = \dfrac{10}{250} = \dfrac{1}{25} = 0{,}04$

On constate que $f \notin \mathbf{I}$, au risque d'erreur de $5\ \%$ il va falloir réviser la machine.

Partie B:

1) D'après l'énoncé, on a: $\mathbf{P}_{\mathrm{E}}(\mathbf{L}) = 0{,}95$ (parmi les tubes de type 2) d'où $\mathbf{P}_{\mathrm{E}}\left(\mathbf{L}^{-}\right) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$ et $\mathbf{P}\left(\mathbf{E}^{-} \cap \mathbf{L}\right) = 0{,}036 = \mathbf{P}\left(\mathbf{E}^{-}\right) \times \mathbf{P}_{\mathrm{E}^{-}}(\mathbf{L})$ d'où

$$\mathbf{P}_{\mathrm{E}^{-}}(\mathbf{L}) = \frac{\mathbf{P}\left(\mathbf{E}^{-} \cap \mathbf{L}\right)}{\mathbf{P}\left(\mathbf{E}^{-}\right)} = \frac{0{,}036}{0{,}04} = 0{,}9 \quad \mathbf{P}_{\mathrm{E}^{-}}\left(\mathbf{L}^{-}\right) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$$



2) Formule de probabilités totales:

$$\mathbf{P}(\mathbf{L}) = \mathbf{P}(\mathbf{E} \cap \mathbf{L}) + \mathbf{P}\left(\mathbf{E}^{-} \cap \mathbf{L}\right) = \mathbf{P}(\mathbf{E}) \times \mathbf{P}_{\mathrm{E}}(\mathbf{L}) + \mathbf{P}\left(\mathbf{E}^{-}\right) \times \mathbf{P}_{\mathrm{E}^{-}}(\mathbf{L})$$

$\Leftrightarrow \mathbf{P}(\mathbf{L}) = 0{,}96 \times 0{,}95 + 0{,}04 \times 0{,}9$
Donc $\mathbf{P}(\mathbf{L}) = 0{,}948$

Exercice 2:

Affirmation 1:

$$z - i = i(z+1) \Leftrightarrow z - i = iz + i \Leftrightarrow z - iz = 2i \Leftrightarrow z(1-i) = 2i \Leftrightarrow z = \frac{2i}{(1-i)}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i + 2i^2}{2} = \frac{-2 + 2i}{2}$$

Donc $z = -1 + i$ avec $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ et $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ d'où $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$

Conclusion: $z = |z|\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2} \times e^{i\frac{3\pi}{4}} \neq \sqrt{2} \times e^{i\frac{\pi}{4}}$

Affirmation fausse

Affirmation 2:

$x \in \left] \frac{-\pi}{2} \; ; \; \frac{\pi}{2} \right[$ on a:

$1 + e^{2ix} = 1 + \cos(2x) + i\sin(2x)$

$2\cos(x) \times e^{-ix} = 2\cos(x) \times \left(\cos(-x) + i\sin(-x)\right) = 2\cos(x) \times \left(\cos(x) - i\sin(x)\right)$ car $\begin{cases} \cos(-x) = \cos(x) \\ \sin(-x) = -\sin(x) \end{cases}$

$2\cos(x) \times e^{-ix} = 2\cos^2(x) - 2i\cos(x)\sin(x)$ on sait que: $\begin{cases} \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \\ \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \\ 2\cos^2(x) = \cos(2x) + 1 \end{cases}$

Donc $2\cos(x) \times e^{-ix} = \cos(2x) + 1 - i\sin(2x)$

Conclusion: $1 + e^{2ix} \neq 2\cos(x) \times e^{-ix}$

Affirmation fausse

Affirmation 3:

Le point A a pour affixe i et le point B a pour affixe -1

$|z - i| = |z + 1| \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_Z| \Leftrightarrow \mathbf{AM} = \mathbf{BM}$

Le point M est donc sur la médiatrice du segment $[\mathbf{AB}]$

Les coordonnées de A et B sont : $\mathbf{A}(0,1)$ et $\mathbf{B}(-1\,;0)$; le vecteur directeur de la droite $(\mathbf{AB})$ est: $\overrightarrow{\mathbf{AB}}(-1\,;-1)$ donc le vecteur normal est: $\vec{n}\,(-1$

L'équation cartésienne de la médiatrice est: la médiatrice du segment $[\mathbf{AB}]$ admet comme vecteur directeur $\vec{n}\,(-1\,;1)$:

$1x + 1y + c = 0$ soit I le milieu de $[\mathbf{AB}] \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-1}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$, $\mathbf{I}\left(\frac{-1}{2} \; ; \; \frac{1}{2}\right)$

I appartient à la médiatrice: $x_I + y_I + c = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} + c = 0$ d'où $c = 0$

Conclusion: L'équation de la médiatrice du segment $[\mathbf{AB}]$ est : $y = -x$

Affirmation vraie

Affirmation 4:

L'équation $z^5 + z - i + 1 = 0$ admet une solution réelle

Soit a cette solution réelle, on a: $a^5 + a + 1 - i = 0 \Leftrightarrow a^5 + a + 1 = i$ ce qui est impossible car un réel ne peut être égal à un imaginaire pur

Conclusion: Affirmation fausse

Exercice 3:

Partie A: établir une inégalité

1) $\mathbf{f}(x) = x - \ln(x+1)$ f est continue et dérivable sur $[0\,;+\infty[$

$\mathbf{f}'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x}{x+1} \geqslant 0$

Tableau de variations:

x	$0 \qquad +\infty$
$\mathbf{f}'(x)$	$+$
$\mathbf{f}(x)$	$0 \nearrow$

$\mathbf{f}(0) = 0 - \ln(1) = 0$

2) Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, on a: $\mathbf{f}(0) \leqslant \mathbf{f}(x)$ d'après la question précédente

Donc $0 \leqslant x - \ln(x+1) \Leftrightarrow \ln(x+1) \leqslant x$

Partie B: application à l'étude d'une suite

1) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - \ln\left(1 + u_n\right)$

$u_{0+1} = u_1 = u_0 - \ln\left(1 + u_0\right) = 1 - \ln(2)$

$u_{1+1} = u_2 = u_1 - \ln\left(1 + u_1\right) = 1 - \ln(2) - \ln\left(2 - \ln(2)\right) \approx 0{,}039$

2)a) ***Initialisation***: $u_0 = 1 \geqslant 0$ la propriété est vraie au rang $n = 0$

Hérédité: on suppose que la propriété est vraie au rang n , $u_n \geqslant 0$ et on doit démontrer qu'elle est vraie au rang $n+1$

$u_{n+1} = \mathbf{f}\left(u_n\right)$, d'après la partie A, on sait que pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, on a : $\mathbf{f}(x) \geqslant 0$

On sait que: $u_n \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathbf{f}\left(u_n\right) \geqslant \mathbf{f}(0)$ car la fonction f est croissante sur $[0\,;+\infty[$

Donc $u_{n+1} \geqslant 0$, la propriété est vraie au rang $n+1$

Conclusion: Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant 0$

2)b) $u_{n+1} = u_n - \ln\left(1 + u_n\right) \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = -\ln\left(1 + u_n\right)$

Comme $u_n \geqslant 0$ on a $1 + u_n \geqslant 1$ d'où $\ln\left(1 + u_n\right) \geqslant \ln(1) \Leftrightarrow \ln\left(1 + u_n\right) \geqslant 0$

Par conséquent, $u_{n+1} - u_n = -\ln\left(1 + u_n\right) \leqslant 0$ donc la suite $\left(u_n\right)$ est décroissante.

De plus la suite étant décroissante et $u_0 = 1$ on a: $u_n \leqslant u_0$ soit $u_n \leqslant 1$

2)c) La suite $\left(u_n\right)$ est décroissante et minorée par 0 (car $u_n \geqslant 0$); elle est donc convergente.

3) la limite l vérifie: $\mathbf{f}(l) = l \Leftrightarrow l = l - \ln(1+l) \Leftrightarrow \ln(1+l) = 0$

D'où $\ln(1+l) = \ln(1) \Leftrightarrow 1+l=1 \Leftrightarrow l=0$

4)a) Algorithme:

Variables:	**N entier et U réel**
Initialisation:	**N prend la valeur 0**
	U prend la valeur 1
Traitement:	**Tant que** $U \geqslant 10^{-p}$
	U prend la valeur $U - \ln(1+U)$
	N prend la valeur $N+1$
	Fin Tant que
Sortie:	**Afficher N**

4)b) A la calculatrice numworks on trouve:

$u_5 \approx 3{,}96 \times 10^{-14}$ et $u_6 \approx 4{,}94 \times 10^{-17}$

A partir du rang 6, on a $u_n \leqslant 10^{-15}$

Exercice 4:

1) Les plans (ABC) et (KLM) sont parallèles.

Les droites (IN) et (AE) sont parallèles et la droite (AE) est perpendiculaire au plan (ABC) (car c'est un cube).

Par conséquent (IN) est perpendiculaire au plan (ABC) et donc au plan (KLM).

La droite (IN) est donc orthogonale à toutes les droites de ce plan et donc (IN) est orthogonale à la droite (ML).

2)a) $N\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 1\right)$ et $C(1 ; 1 ; 0)$ d'où $\overrightarrow{NC}\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; -1\right)$

$M\left(\frac{1}{2} ; 0 ; \frac{1}{2}\right)$ et $L\left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ d'où $\overrightarrow{ML}\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 0\right)$

2)b) $\overrightarrow{NC} \cdot \overrightarrow{ML} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{-1}{2}\right) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 0 \times (-1) = \frac{-1}{4} + \frac{1}{4} + 0 = 0$ donc $\overrightarrow{NC}$ et $\overrightarrow{ML}$ sont orthogonaux.

Donc les droites (NC) et (ML) sont orthogonales

2)c) Le vecteur $\overrightarrow{ML}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{NC}$ et $\overrightarrow{IN}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{IN}$ et $\overrightarrow{NC}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (NCI).

Le vecteur $\overrightarrow{ML}$ est donc un vecteur normal du plan (NCI).

Une équation cartésienne du plan (NCI) est: $\frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}y + d = 0 \Leftrightarrow x - y - 2d = 0$

Comme $C(1 ; 1 ; 0)$ appartient à ce plan, on a: $x_C - y_C - 2d = 0 - 2d = 0$ soit $d = 0$

Conclusion: une équation du plan (NCI) est: $x - y = 0$

3) $N\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 1\right)$, $M\left(\frac{1}{2} ; 0 ; \frac{1}{2}\right)$ et $J\left(1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$

$x_N - y_N + z_N = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 1$

$x_M - y_M + z_M = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1$

$x_N - y_N + z_N = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Les coordonnées de ces trois points vérifient l'équation: $x - y + z = 1$

Conclusion: l'équation du plan (NJM) est: $x - y + z - 1 = 0$

3)b) La droite (DF) admet comme vecteur directeur :

$D(0 ; 1 ; 0)$ et $F(1 ; 0 ; 1)$ d'où $\overrightarrow{DF}(1 ; -1 ; 1)$

Le plan (NJM) admet comme vecteur normal $\vec{n}(1 ; -1 ; 1)$

On constate que: $\vec{n} = \overrightarrow{DF}$, ces vecteurs sont donc colinéaires

Conclusion : la droite (DF) est perpendiculaire au plan (NJM)

3)c) Intersection des plans (NJM) et (NCI)

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x - x + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = y \\ z = 1 \end{cases}$$

Le point N répond à ces critères $N\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 1\right)$ (de plus N appartient à ces deux plans)

Le point E répond également à ces critères $E(0 ; 0 ; 1)$

Conclusion: L'intersection des plans (NCI) et (NJM) est la droite (NE).