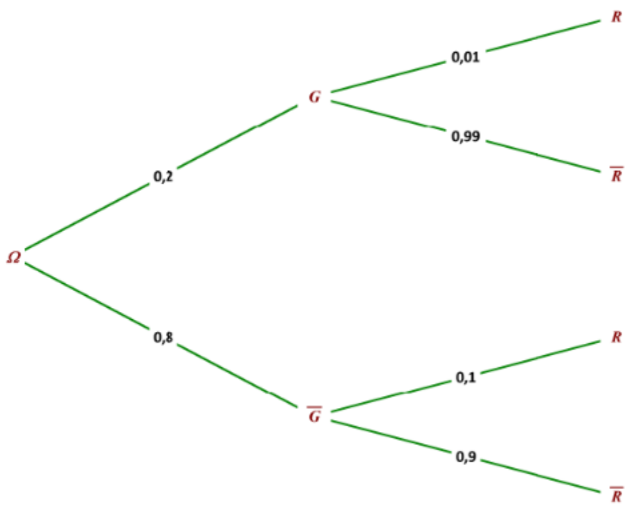
Correction: Nouvelle Calédonie mars 2019

Exercice 1:

Partie A:

1)a) Arbre pondéré:



1)b) La voiture choisie est sous garantie **ET** nécessite une réparation:
On doit calculer: $\mathbf{P(G \cap R)}$

$\mathbf{P(G \cap R) = P(G) \times P_G(R) = 0{,}2 \times 0{,}01 = 0{,}002}$

1)c) Formule des probabilités totales: $\mathbf{G}$ et $\mathbf{\overline{G}}$ forment une partition de l'univers Ω

$$\mathbf{P(R) = P(G \cap R) + P\left(\overline{G} \cap R\right) = 0{,}002 + P\left(\overline{G}\right) \times P_{\overline{G}}(R)}$$

$\mathbf{P(R) = 0{,}002 + 0{,}8 \times 0{,}1 = 0{,}082}$

1)d) La voiture choisie nécessite une réparation, on veut calculer: $\mathbf{P_R(G) = ?}$

$$\mathbf{P_R(G) = \frac{P(R \cap G)}{P(R)} = \frac{P(G) \times P_G(R)}{P(R)} = \frac{0{,}002}{0{,}082}}$$

$\mathbf{P_R(G) \approx 0{,}024}$ (à $\mathbf{10^{-3}}$ près)

2) Voiture garantie: entretien véhicule gratuit
Voiture non garantie: coût entretien véhicule 100 euros mais si réparation il faut ajouter 400 euros
On considère X la variable aléatoire qui représente le coût d'entretien d'un véhicule:
X peut prendre les valeurs suivantes: $\mathbf{0, 100}$ **ou** $\mathbf{500}$

$\mathbf{X = x_i}$	0	100	500
$\mathbf{P\left(X = x_i\right) = p_i}$	0,2	0,72	0,08

$$\mathbf{E(X) = \sum_i x_i \times p_i = 0 + 100 \times 0{,}72 + 500 \times 0{,}08 = 112}$$

Budget à prévoir: $\mathbf{112 \times 2500 = 280000}$, il faut donc prévoir un budget de $\mathbf{280000}$ euros, il faut donc prévoir plus que la somme envisagée.

Partie B:

1) $\mathbf{p = 0{,}8}$, $\mathbf{n = 600 \geqslant 30}$, $\mathbf{np = 480 \geqslant 5}$ et $\mathbf{n(1-p) = 120 \geqslant 5}$

$$\mathbf{I = \left[p - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ; p + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] \approx [0{,}77\ ; 0{,}83]}$$

2) $\mathbf{f = \frac{550}{600} = \frac{11}{12} \approx 0{,}92}$, on constate que: $\mathbf{f \notin I}$

On peut remettre en doute l'affirmation de la directrice.

Partie C:

1) La variable aléatoire Y suit une loi normale de paramètres $\mathbf{\mu = 450}$ et $\mathbf{\sigma = 100}$
On veut calculer: $\mathbf{P\left(500 \leqslant Y \leqslant 600\right) = ?}$
A la calculatrive, on trouve:

$\mathbf{P\left(500 \leqslant Y \leqslant 600\right) \approx 0{,}242}$

La probabilité que le client louant le véhicule pour une semaine parcoure entre 500km et 600km est environ 0,242.

2) On doit trouver $\mathbf{a}$ tel que: $\mathbf{P\left(X \leqslant a\right) = 0{,}15}$
A la calculatrice, on trouve: $\mathbf{a \approx 346\ km}$
Pour bénéficier de l'offre promotionnelle, le client devra rouler moins de 346km

Exercice 2:

Partie A: Fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par: $\mathbf{g(x) = (x+2)\, e^{x-4} - 2}$

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = ?$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x+2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x \times \dfrac{1}{e^4} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = ?$

$g(x) = (x+2)\, e^{x-4} - 2 = \dfrac{1}{e^4} \times x\, e^x + 2\, \dfrac{1}{e^4} \times e^x - 2$

On sait que: $\lim\limits_{x \to -\infty} x\, e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -2$, $y = -2$ est une asymptote horizontale au voisiange de $-\infty$

3) g est de la forme $u \times v$ d'où $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

$u(x) = x+2$ $\quad u'(x) = 1$

$v(x) = \dfrac{1}{e^4}\, e^x$ $\quad v'(x) = \dfrac{1}{e^4}\, e^x$

$g'(x) = 1 \times \dfrac{1}{e^4}\, e^x + (x+2) \times \dfrac{1}{e^4}\, e^x = \dfrac{1}{e^4}\,(x+3)\, e^x$

$g'(x)$ a le même signe que $(x+3)$ car $\dfrac{1}{e^4}\, e^x > 0$

x	$-\infty$ $\quad -3 \quad$ $+\infty$
$x+3$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$

Tableau de variations:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-2 \searrow$	$g(-3)$	$\nearrow +\infty$

$g(-3) = (-3+2)\, e^{-3-4} - 2 = -e^{-7} - 2 = \dfrac{-1}{e^7} - 2 \approx -2{,}00091 < 0$

4) Sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -3]$, on a $g(x) < 0$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution

Sur l'intervalle $[-3\ ;\ +\infty[$, la fonction g est continue et strictement croissante.

On sait que: $g(-3) < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution

Il existe une unique solution $\alpha \in [-3\ ;\ +\infty[$ telle que $g(\alpha) = 0$

Conclusion: l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbf{R}$

5) Signe de la fonctiong:

x	$-\infty$ $\quad \alpha \quad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$

6) A la calculatrice, on trouve:

$f(3{,}069) < 0$ et $f(3{,}07) > 0$ d'où $3{,}069 \leqslant \alpha \leqslant 3{,}07$

Partie B: Etude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par: $f(x) = x^2 - x^2\, e^{x-4}$

1) $f(x) = x^2 - x^2\, e^{x-4} = x^2\left(1 - e^{x-4}\right) = 0$

Un produit de facteurs est nul si l'un de ses facteurs est nul: $\begin{cases} x^2 = 0 \\ \text{ou} \\ 1 - e^{x-4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ e^{x-4} = 1 = e^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 4 \end{cases}$

Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont : 0 et 4

2) On admet que f est dérivable sur $\mathbf{R}$:

$f'(x) = 2x - \left[2x\, e^{x-4} + x^2\, e^{x-4}\right] = 2x - 2x\, e^{x-4} - x^2\, e^{x-4} = -\left(-2x + 2x\, e^{x-4} + x^2\, e^{x-4}\right) = -x\left(2\, e^{x-4} + x\, e^{x-4} - 2\right)$

$f'(x) = -x\left[(x+2)\, e^{x-4} - 2\right] = -x \times g(x)$

Tableau de variations:

x	$-\infty$	0		α	$+\infty$
$-x$	$+$	0	$-$		$-$
$g(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$

3) La fonction f admet un maximum en $x = \alpha$ et il vaut: $f(\alpha) = \alpha^2 - \alpha^2\, e^{\alpha-4}$ (1)

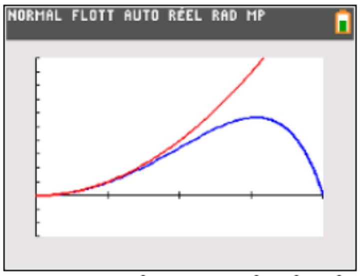
De plus on sait que: $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (\alpha+2)\, e^{\alpha-4} = 2 \Leftrightarrow e^{\alpha-4} = \dfrac{2}{\alpha+2}$ (2)

(1) et (2), on a : $f(\alpha) = \alpha^2 - \alpha^2 \times \dfrac{2}{\alpha+2} = \alpha^2\left(1 - \dfrac{2}{\alpha+2}\right) = \alpha^2 \times \dfrac{\alpha+2-2}{\alpha+2} = \alpha^2 \times \dfrac{\alpha}{\alpha+2}$

$\mathbf{f}(\alpha) = \dfrac{\alpha^3}{\alpha+2}$

Partie C: Aire du domaine

1) Position relative de la courbe représentative de la fonction f et de la parabole d'équation $y = x^2$



Soit $\mathbf{h}(x) = x^2 - \mathbf{f}(x) = x^2 - x^2 + x^2 e^{x-4} = x^2 e^{x-4} \geqslant 0$

La parabole est au-dessus de la courbe représentative de la fonction f.

2) On admet que F est une primitive de f: $\mathbf{F}(x) = \dfrac{x^3}{3} - \left(x^2 - 2x + 2\right) e^{x-4}$

On calcule l'aire comprise entre la parabole, la courbe $\mathbf{C}_f$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 4$

$$\mathbf{A} = \int_0^4 h(x)\,dx = \int_0^4 \left(x^2 - \mathbf{f}(x)\right) dx = \int_0^4 x^2\,dx - \int_0^4 \mathbf{f}(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 - \left[\mathbf{F}(x)\right]_0^4$$

$$\mathbf{A} = \frac{4^3}{3} - 0 - \mathbf{F}(4) + \mathbf{F}(0) = \frac{64}{3} - \frac{64}{3} + 10\,e^0 - 2\,e^{-4} = 10 - 2\,e^{-4}$$

Donc $\mathbf{A} = 10 - \dfrac{2}{e^4}$ unité d'aire.

Exercice 3:

1) ***Affirmation 1:***

$$(\text{E}): z\left(z^2 - 8z + 32\right) = 0 \iff \begin{cases} z = 0 \\ \text{ou} \\ z^2 - 8z + 32 = 0 \end{cases}$$

Résolvons l'équation: $z^2 - 8z + 32 = 0$

$\Delta = -64 = 64\,i^2 = (8\,i)^2$

$$\text{Les solutions sont: } \begin{cases} z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{8 - 8i}{2} \\ z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{8 + 8i}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} z_1 = 4 - 4i \\ z_2 = 4 + 4i \end{cases}$$

Les points $\mathbf{O}(0\,;0)$; $\mathbf{A}(4\,;-4)$ et $\mathbf{C}(4\,;4)$: les points A et C sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses

Soit I le milieu du segment $[\mathbf{A\,B}]$, les coordonnées de I sont : $\mathbf{I}(4\,;0)$

Aire triangle OAB est: $\dfrac{\mathbf{Base \times hauteur}}{2} = \dfrac{\mathbf{AB \times OI}}{2} = \dfrac{8 \times 4}{2} = 16$

Affirmation 1: VRAIE

2) ***Affirmation 2:***

On considre les points A et B d'affixes respectives $z_\mathrm{A} = 3$ et $z_\mathrm{B} = -3$

$|z-3| = |z+3| \iff |z - z_\mathrm{A}| = |z - z_\mathrm{B}| \iff \mathbf{AM = BM}$

L'ensemble $\boldsymbol{E}$ cherché est la médiatrice du segment $[\mathbf{A\,B}]$

Affirmation 2: FAUSSE

3) ***Affirmation 3:***

Le point $\mathbf{M}_n$ a pour affixe:

$$z_n = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^n = 2^n\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 2^n\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = 2^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$$

Le point $\mathbf{M}_{n+1}$ a pour affixe:

$$z_{n+3} = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^{n+3} = 2^{n+3}\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+3} = 2^{n+3}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{n+3} = 2^{n+3}\left(\cos\left(\frac{(n+3)\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{(n+3)\pi}{3}\right)\right)$$

Le point $\mathbf{O}$ a pour affixe: $z_0 = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^0 = 1$

Si les points sont alignés alors: $\overrightarrow{\mathbf{O\,M}_{n+3}} = k\,\overrightarrow{\mathbf{O\,M}_n}$

$$\overrightarrow{\mathbf{O\,M}_{n+3}} \begin{pmatrix} 2^{n+3}\cos\left(\dfrac{(n+3)\pi}{3}\right) \\ 2^{n+3}\sin\left(\dfrac{(n+3)\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{\mathbf{O\,M}_n} \begin{pmatrix} 2^n\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right) \\ 2^n\sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$$

Vérifions la colinéarité:

$x\,y' - x'\,y = 0$

$$\mathbf{A} = 2^{n+3}\cos\left(\frac{(n+3)\pi}{3}\right) \times 2^n\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - 2^{n+3}\sin\left(\frac{(n+3)\pi}{3}\right) \times 2^n\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

$A = 2^{n+3}\cos\left(\frac{n\pi}{3}+\pi\right)\times 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - 2^{n+3}\sin\left(\frac{n\pi}{3}+\pi\right)\times 2^n\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ or $\begin{cases}\cos(x+\pi) = -\cos(x)\\ \sin(x+\pi) = -\sin(x)\end{cases}$

$A = -2^{n+3}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\times 2^n\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \left(-2^{n+3}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\times 2^n\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$

$A = -2^{n+3}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\times 2^n\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + 2^{n+3}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\times 2^n\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{OM_{n+3}}$ et $\overrightarrow{OM_n}$ sont colinéaires, les points O , M_{n+3} et M_n sont alignés

Affirmation 3: VRAIE

4) *Affirmation 4:*

$sin(x)\left(2\cos^2(x)-1\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin(x)=0\\ 2\cos^2(x)-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin(x)=\sin(0) & (1)\\ \cos^2(x)=\frac{1}{2} & (2)\end{cases}$

$(1)\quad \sin x = \sin 0 \Leftrightarrow \begin{cases}x=0+2k\pi\\ x=\pi-0+2k\pi\end{cases}$

$(2)\quad \cos^2(x)=\frac{1}{2}\quad (2) \Leftrightarrow cox(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $cox(x)=\frac{-1}{\sqrt{2}}$

$cox(x)=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos(x)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ x=\frac{-\pi}{4}+2k\pi\end{cases}$

$cox(x)=\frac{-1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos(x)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\\ x=\frac{-3\pi}{4}+2k\pi\end{cases}$

Les solutions sont: $\frac{-3\pi}{4}$; $\frac{-\pi}{4}$; 0 ; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$ et π dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$

Affirmation 4: FAUSSE

Exercice 4:

Partie A: Conjectures

On considère la suite (u_n) à valeurs réelles définie par $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\frac{u_n}{u_n+8}$

1) On écrit dans la cellule B3 la formule suivante: $\frac{B2}{B2+8}$

2) La suite (u_n) semble être décroissante

3) La suite (u_n) semble converger vers 0

4) Algorithme:

Variables:	i entier et u réel
Initialisation:	u prend la valeur 1
Traitement:	Pour i de 1 à 30
	u prend la valeur $\frac{u}{u+8}$
	Fin Pour
Sortie:	Afficher u

Partie B: Etude générale

1) Initialisation: $n=0$, $u_0=1>0$

Hérédité: on suppose que la propriété est vraie au rang n et on doit montrer qu'elle est vraie au rang n+1

$u_n>0$ et $u_n+8>0+8$ d'où $u_n+8>0$

Donc $u_{n+1}=\frac{u_n}{u_n+8}>0$

Conclusion: Pour tout n entier naturel, $u_n>0$

2) $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n}{u_n+8}-u_n=\frac{u_n-u_n^2-8u_n}{u_n+8}=\frac{-u_n^2-7u_n}{u_n+8}=\frac{-u_n(u_n+7)}{u_n+8}$

$u_n>0$, $u_n+7>0$ et $u_n+8>0$

Donc $u_{n+1}-u_n<0$

La suite (u_n) est décroissante.

3) La suite (u_n) est décroissante **ET** minorée par 0

La suite (u_n) est donc convergente.

Partie C: Expression du terme général

1) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par: $v_n = 1 + \frac{7}{u_n}$

$$v_{n+1} = 1 + \frac{7}{u_{n+1}} = 1 + \frac{7}{\frac{u_n}{u_n+8}} = 1 + \frac{7\left(u_n+8\right)}{u_n} = \frac{u_n+7\,u_n+56}{u_n} = \frac{8\,u_n+56}{u_n}$$

$$v_{n+1} = 8\left(\frac{u_n+7}{u_n}\right) = 8\left(1+\frac{7}{u_n}\right) = 8\,v_n$$

C'est une suite géométrique de raison $q = 8$ et de premier terme $v_0 = 1 + \frac{7}{u_0} = 8$

2) Expression de v_n en fonction de n:

$$v_n = v_0 \times q^n = 8 \times 8^n = 8^{n+1}$$

$$v_n = 1 + \frac{7}{u_n} \iff 8^{n+1} = 1 + \frac{7}{u_n} \iff 8^{n+1} - 1 = \frac{7}{u_n}$$

$$\iff u_n = \frac{7}{8^{n+1}-1}$$

3) $\lim\limits_{n \to +\infty} 8^{n+1} = +\infty$ car $q = 8 > 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 8^{n+1} - 1 = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{7}{8^{n+1}-1} = 0$

4) $u_n < 10^{-18} \iff \frac{7}{8^{n+1}-1} < 10^{-18} \iff 7 \times 10^{18} < 8^{n+1} - 1 \iff 7 \times 10^{18} + 1 < 8^{n+1}$

$\iff \frac{1}{8}\left(7 \times 10^{18} + 1\right) < 8^n \iff \ln\left(\frac{1}{8}\left(7 \times 10^{18}+1\right)\right) < \ln\left(8^n\right)$ car la fonction "ln" est croissante sur $]0\,;+\infty[$

$$\iff \ln\left(\frac{1}{8}\left(7 \times 10^{18}+1\right)\right) < n \ln(8) \iff \frac{\ln\left(\frac{1}{8}\left(7 \times 10^{18}+1\right)\right)}{\ln(8)} < n$$

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{8}\left(7 \times 10^{18}+1\right)\right)}{\ln(8)} \approx 19{,}87 \text{ soit } n_0 = 20$$

Donc le plus petit entier naturel tel que $u_n < 10^{-18}$ est $n_0 = 20$