

# ☞ Baccalauréat S Nouvelle Calédonie mars 2019 ☞

Durée : 4 heures

## Exercice 1

5 points

Commun à tous les candidats

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment.

### Partie A

Une société de location de voitures s'intéresse à l'état mécanique de son parc automobile afin d'anticiper les frais d'entretien.

On dispose des données suivantes :

- 20 % des voitures sont sous garantie;
- pour 1 % des voitures sous garantie, une réparation est nécessaire;
- pour 10 % de celles qui ne sont plus sous garantie, une réparation est nécessaire.

On choisit une voiture au hasard dans le parc et on considère les événements suivants :

- $G$  : « la voiture est sous garantie »;
- $R$  : « une réparation est nécessaire ».

- Traduire la situation par un arbre pondéré.
  - Calculer la probabilité que la voiture choisie soit sous garantie et nécessite une réparation.
  - Justifier que  $P(R) = 0,082$ .
  - Il s'avère que la voiture choisie nécessite une réparation.

Quelle est la probabilité qu'elle soit sous garantie? On arrondira le résultat à  $10^{-3}$ .

- La société de location fait appel à un garage pour l'entretien de son parc automobile.

L'entretien consiste en une révision à laquelle s'ajoutent d'éventuelles réparations. Les conditions commerciales du garage sont les suivantes :

- si la voiture est encore sous garantie, l'entretien est gratuit;
- si la voiture n'est plus sous garantie, l'entretien est facturé de la manière suivante : la révision coûte 100 € et, si une réparation est nécessaire, il faut rajouter 400 €.

Sachant que son parc automobile compte 2 500 voitures, est-il raisonnable pour la société de location de prévoir un budget annuel de 250 000 euros pour l'entretien de l'ensemble des voitures?

On pourra introduire la variable aléatoire  $X$  qui représente le coût d'entretien d'une voiture.

### Partie B

La société de location propose à ses clients deux contrats de location : un contrat de courte durée (inférieure à 2 jours) et un contrat de longue durée (de 3 à 7 jours).

La directrice de cette société affirme que 80 % des clients demandent un contrat de courte durée.

Sur les 600 derniers contrats signés l'année précédente, 550 étaient des contrats de courte durée.

- En supposant que l'affirmation de la directrice est correcte, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des contrats de courte durée.
- Que peut-on penser de l'affirmation de la directrice?

### Partie C

On modélise le nombre de kilomètres parcourus par les clients louant une voiture pour une semaine par une variable aléatoire  $Y$  suivant la loi normale d'espérance  $\mu = 450$  et d'écart-type  $\sigma = 100$ .

1. Quelle est la probabilité que le client louant la voiture pour une semaine roule entre 500 km et 600 km? On arrondira le résultat à  $10^{-3}$ .
2. La société de location souhaite faire une offre promotionnelle aux 15 % de ses clients parcourant le moins de kilomètres en une semaine.  
En-dessous de quel kilométrage hebdomadaire, arrondi à l'unité, un client sera-t-il concerné par cette offre?

**Exercice 2****6 points****Commun à tous les candidats****Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire**Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$g(x) = (x+2)e^{x-4} - 2.$$

1. Déterminer la limite de  $g$  en  $+\infty$ .
2. Démontrer que la limite de  $g$  en  $-\infty$  vaut  $-2$ .
3. On admet que la fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on note  $g'$  sa dérivée.  
Calculer  $g'(x)$  pour tout réel  $x$  puis dresser le tableau de variations de  $g$ .
4. Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$ .
5. En déduire le signe de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .
6. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude  $10^{-3}$  de  $\alpha$ .

**Partie B : Étude de la fonction  $f$** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = x^2 - x^2 e^{x-4}.$$

1. Résoudre l'équation  $f(x) = 0$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on note  $f'$  sa fonction dérivée.  
On admet par ailleurs que, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = -xg(x)$  où la fonction  $g$  est celle définie à la partie A.  
Étudier les variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Démontrer que le maximum de la fonction  $f$  sur  $[0; +\infty[$  est égal à  $\frac{\alpha^3}{\alpha+2}$ .

**Partie C : Aire d'un domaine**

Dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on note  $\mathcal{D}$  le domaine compris entre la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$ , la parabole  $\mathcal{P}$  d'équation  $y = x^2$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 4$ .

1. Déterminer la position relative des courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{P}$ .
2. On admet qu'une primitive de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  est définie par :

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - (x^2 - 2x + 2)e^{x-4}.$$

Calculer l'aire du domaine  $\mathcal{D}$  en unité d'aire. On donnera la valeur exacte.

**Exercice 3****4 points****Commun à tous les candidats**

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

*Il est attribué 1 point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.*

Pour les questions 1 à 3, on se place dans un plan muni du repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

1. Soit (E) l'équation d'inconnue le nombre complexe  $z$

$$z(z^2 - 8z + 32) = 0.$$

**Affirmation 1 :** Les points dont les affixes sont les solutions de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle d'aire égale à 16 unités d'aire.

2. Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des points dont les affixes  $z$  vérifient

$$|z - 3| = |z + 3|.$$

**Affirmation 2 :** L'ensemble  $\mathcal{E}$  est le cercle de centre O et de rayon 3.

3. On considère la suite de nombres complexes  $(z_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$z_n = (1 - i\sqrt{3})^n.$$

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $M_n$  le point d'affixe  $z_n$ .

**Affirmation 3 :** Pour tout entier naturel  $n$ , les points  $M_n$ , O et  $M_{n+3}$  sont alignés.

4. On considère l'équation d'inconnue le nombre réel  $x$

$$\sin(x)(2\cos^2(x) - 1) = 0.$$

**Affirmation 4 :** Cette équation admet exactement quatre solutions sur l'intervalle  $] -\pi ; \pi ]$  qui sont :  $-\frac{\pi}{4}$  ;  $0$  ;  $\frac{\pi}{4}$  et  $\pi$ .

**Exercice 4****5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

On considère la suite  $(u_n)$  à valeurs réelles définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 8}.$$

**Partie A : Conjectures**

Les premières valeurs de la suite  $(u_n)$  ont été calculées à l'aide d'un tableur dont voici une capture d'écran :

	A	B
1	$n$	$u_n$
2	0	1
3	1	0,111 111 11
4	2	0,013 698 63
5	3	0,001 709 4
6	4	0,000 213 63
7	5	2,670 3E-05
8	6	3,337 9E-06
9	7	4,172 3E-07
10	8	5,215 4E-08
11	9	6,519 3E-09
12	10	8,149 1E-10

1. Quelle formule peut-on entrer dans la cellule B3 et copier vers le bas pour obtenir les valeurs des premiers termes de la suite  $(u_n)$ ?
2. Quelle conjecture peut-on faire sur les variations de la suite  $(u_n)$ ?
3. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite  $(u_n)$ ?
4. Écrire un algorithme calculant  $u_{30}$ .

### Partie B : Étude générale

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 0$ .
2. Étudier les variations de la suite  $(u_n)$ .
3. La suite  $(u_n)$  est-elle convergente? Justifier.

### Partie C : Recherche d'une expression du terme général

On définit la suite  $(v_n)$  en posant, pour tout entier naturel  $n$ , 7

$$v_n = 1 + \frac{7}{u_n}.$$

1. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 8 dont on déterminera le premier terme.
2. Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n = \frac{7}{8^{n+1} - 1}.$$

3. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$
4. On cherche dans cette question le plus petit entier naturel  $n_0$  tel que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à  $n_0$ ,  $u_n < 10^{-18}$ .  
Justifier l'existence d'un tel entier  $n_0$  et déterminer sa valeur.