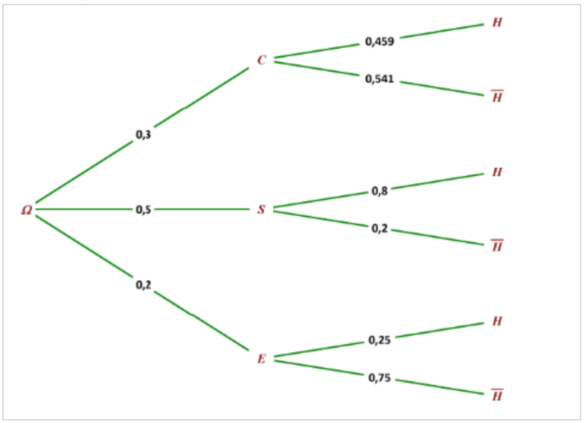
Correction Antilles-Guyane S 2018

Exercice 1:

Partie A:

1) Arbre pondéré:



2) L'arbre abattu est un chêne vendu à un habitant de la commune:

$|P(C \cap H)| = P(C) \times P_C(H) = 0{,}3 \times 0{,}459 = 0{,}1377$

3) La probabilité que l'arbre abattu soit vendu à un habitant de la commune:

On veut donc calculer: $P(H) = P(C \cap H) + P(S \cap H) + P(E \cap H)$

$P(H) = P(C) \times P_C(H) + P(S) \times P_S(H) + P(E) \times P_E(H) = 0{,}3 \times 0{,}459 + 0{,}5 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}25$

$P(H) = 0{,}5877$

4) Probabilité qu'un arbre abattu à un habitant de la commune soit un sapin:

on doit calculer: $P_H(S) = \dfrac{P(H \cap S)}{P(H)} = \dfrac{P(S) \times P_S(H)}{P(H)} = \dfrac{0{,}5 \times 0{,}8}{0{,}5877}$

$P_H(S) \approx 0{,}681$

Partie B:

1) X varaible aléatoire suivant une loi normale d'espérance $\mu = 4000$ et d'écart type $\sigma = 300$

On calcule la probabilité qu'il y ait entre 3400 et 4600 arbres sur un hectare donné de cette forêt:

A la calculatrice, on obtient:

$P(3400 \leqslant X \leqslant 4600) \approx 0{,}954$

2) Probabilité qu'il y ait plus de 4500 arbres sur un hectare donné de cette forêt

A la calculatricen on obtient:

$P(X \geqslant 4500) \approx 0{,}048$

Partie C:

L'exploitant affirme que la densité de sapins dans cette forêt communale est de 1 sapin pour 2 arbres.

Sur une parcelle, on acompté 106 sapins dans un échantillon de 200 arbres.

$p = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$ et $f_{obs} = \dfrac{106}{200} = 0{,}53$

$n = 200 \geqslant 30$, $np = 100 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 100 \geqslant 5$

Les conditions sont réunies.

Intervalle de fluctuation:

$$I = \left[p - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \; ; p + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] = \left[0{,}5 - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}5 \times 0{,}5}{200}} \; ; 0{,}5 + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}5 \times 0{,}5}{200}} \right]$$

$I \approx [0{,}430 \; ; 0{,}570]$

On constate que $f_{obs} \in I$

Conclusion: on ne remet pas en cause l'affirmation de l'exploitant au seuil de 95%.

Exercice 2:

1) Dans le repère $(A \; ; \overrightarrow{AI} \; ; \overrightarrow{AJ} \; ; \overrightarrow{AK})$ on a: $\overrightarrow{FL} = \dfrac{2}{3} \overrightarrow{FE}$ avec $E(0 \; ; 0 \; ; 6)$; $F(6 \; ; 0 \; ; 6)$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FE}$: $\overrightarrow{FE} \begin{pmatrix} x_E - x_F \\ y_E - y_F \\ z_E - z_F \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{FE} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3} \overrightarrow{FE} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L - x_F = -4 \\ y_L - y_F = 0 \\ z_L - z_F = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L = -4 + x_F = -4 + 6 \\ y_L = 0 + y_F = 0 \\ z_L = 0 + z_F = 0 + 6 \end{cases}$$

Conclusion: Les coordonnées du point L sont: $L \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

3)a) Représentation paramétrique de la droite (BL)

Avec $B(6 \; ; 0 \; ; 0)$ et $L(2 \; ; 0 \; ; 6)$

$\overrightarrow{BL}$ est un vecteur directeur de la droite (BL) : $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix} x_L - x_B \\ y_L - y_B \\ z_L - z_B \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

B est un point de la droite (BL)

$\begin{cases} x = x_B + \alpha\, t \\ y = y_B + \beta\, t \\ z = z_B + \gamma\, t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ d'où $\begin{cases} x = 6 - 4t \\ y = 0 \\ z = 6t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

3)b) Le point S appartient à la droite (AE)

Les coordonnées de S sont: $S\left(0\ ;0\ ;z_S\right)$

Le point S appartient à la droite (BL) donc: $\begin{cases} x_S = 6 - 4t \\ y_S = 0 \\ z_S = 6t \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x_S = 6 - 4t = 0 \\ y_S = 0 \\ z_S = 6t \end{cases}$ d'où $6 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

On obtient: $z_S = 6t = 6 \times \dfrac{3}{2} = 3 \times 3 = 9$

Les coordonnées de S sont: $S(0\ ;0\ ;9)$

4)a) Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\vec{n}(3\ ;3\ ;2)$

Le vecteur $\vec{n}$ est le vecteur normal du plan (BDL)

$B(6\ ;0\ ;0)$, $D(0\ ;6\ ;0)$ et $L(2\ ;0\ ;6)$

Les vecteurs $\overrightarrow{BD}(-6\ ;6\ ;0)$ et $\overrightarrow{BL}(-4\ ;0\ ;6)$ ne sont pas colinéaires (les coordonnées ne sont pas proportionnelles)

Donc les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BL}$ forment le plan (BDL)

$\overrightarrow{BD} \cdot \vec{n} = (-6) \times 3 + 6 \times 3 + 0 \times 2 = 0$ et $\overrightarrow{BL} \cdot \vec{n} = (-4) \times 3 + 0 \times 3 + 6 \times 2 = 0$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{BL}$ et au vecteur $\overrightarrow{BD}$

Conclusion: le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BDL)

4)b) Equation cartésienne du plan (BDL)

$\vec{n}(3\ ;3\ ;2)$ est vecteur normal du plan (BDL)

Equation: $3x + 3y + 2z + d = 0$

$B \in (BDL)$: $3x_B + 3y_B + 2z_B + d = 0 \Leftrightarrow 18 + d = 0 \Leftrightarrow d = -18$

Conclusion: équation cartésienne du plan (BDL) : $3x + 3y + 2z - 18 = 0$

4)c) Représentation paramétrique de la droite (EH)

$\begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = 6 \end{cases}$, $s \in \mathbb{R}$

M est le point d'intersection de la droite (EH) et du plan (BDL)

$\begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = 6 \\ 3x + 3y + 2y - 18 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = 6 \\ 3 \times 0 + 3 \times s + 2 \times 6 - 18 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = 6 \\ 3s - 6 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 6 \\ s = 2 \end{cases}$

Conclusion: Les coordonnées de M sont: $M(0\ ;2\ ;6)$

5) Volume du tétraèdre $SELM$: $V = \dfrac{1}{3} \times Base \times hauteur = \dfrac{1}{3} \times A_{ELM} \times SE$ avec $A_{ELM} = \dfrac{EL \times EM}{2}$

$EM = \sqrt{\left(x_M - x_E\right)^2 + \left(y_M - y_E\right)^2 + \left(z_M - z_E\right)^2} = 2$ de même $EL = 2$

D'où $A_{ELM} = \dfrac{2 \times 2}{2} = 2$

$ES = \sqrt{\left(x_S - x_E\right)^2 + \left(y_S - y_E\right)^2 + \left(z_S - z_E\right)^2} = 3$ de même $ES = 3$

Conclusion: $V = \dfrac{1}{3} \times A_{ELM} \times SE = \dfrac{1}{3} \times 2 \times 3 = 2$, le volume du tétraèdre $SELM$ est de $2\ m^3$

6) $\overrightarrow{LS} \cdot \overrightarrow{LE} = LS \times LE \times \cos\left(\widehat{SLE}\right) = x \times x' + y \times y' + z \times z'$

$LS = \sqrt{\left(x_S - x_L\right)^2 + \left(y_S - y_L\right)^2 + \left(z_S - z_L\right)^2} = \sqrt{13}$ et $LE = 2$

$\overrightarrow{LS} \cdot \overrightarrow{LE} = (-2) \times (-2) + 0 + 0 = 4$ et $\overrightarrow{LS} \cdot \overrightarrow{LE} = LS \times LE \times \cos\left(\widehat{SLE}\right) \Leftrightarrow 4 = 2\sqrt{13} \times \cos\left(\widehat{SLE}\right)$

d'où $\cos\left(\widehat{SLE}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{13}} = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

Conclusion: $\widehat{SLE} \approx 56{,}3°$, la contrainte d'angle est donc respectée (car $55° \leqslant \widehat{SLE} \leqslant 60°$)

Exercice 3:

Partie A: Etude de la fonction f

1) $f(x) = e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1)$

On sait que: $\begin{cases} -1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} -1 \leqslant -\cos x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \end{cases}$ donc $-2 \leqslant -\cos x + \sin x \leqslant 2$

$-2 + 1 \leqslant -\cos x + \sin x + 1 \leqslant 2 + 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant -\cos x + \sin x + 1 \leqslant 3$

Comme $e^{-x} > 0$, on a: $-1\, e^{-x} \leqslant e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \leqslant 3\, e^{-x}$

Conclusion: Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\, e^{-x}$

2) on pose $X = -x$ d'où $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ (car $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$) donc $\lim\limits_{x \to +\infty} -e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 3\, e^{-x} = 0$

Conclusion: d'après le théorème d'encadrement, on a: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

3) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$:

forme $u \times v$ donc sa dérivée est de la forme: $u' \times v + u \times v'$ avec $\begin{cases} u = e^{-x} \\ v = -\cos x + \sin x + 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} u' = -e^{-x} \\ v' = \sin x + \cos x \end{cases}$

$\mathbf{f}'(x) = e^{-x}(\sin x + \cos x) - e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) = e^{-x}(\sin x + \cos x + \cos x - \sin x - 1)$

$\mathbf{f}'(x) = e^{-x}(2\cos x - 1)$

4)a) $x \in [-\pi ; \pi]$:

$$\mathbf{f}'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

Comme $x \in [-\pi ; \pi]$, les solutions sont: $x = \frac{-\pi}{3}$ ou $x = \frac{\pi}{3}$

$\mathbf{f}'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{-\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right[$ et $\mathbf{f}'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\pi ; \frac{-\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3} ; \pi\right]$

4)b) Tableau de variations:

x	$-\pi$		$\frac{-\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
$\mathbf{f}'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\mathbf{f}(x)$	$2e^{\pi}$	$\searrow$	$-1{,}04$	$\nearrow$	$0{,}48$	$\searrow$	$2e^{-\pi}$

$$\begin{cases} \mathbf{f}(-\pi) = e^{\pi}\left(-\cos(-\pi) + \sin(-\pi) + 1\right) = 2e^{\pi} \approx 46{,}28 \\ \mathbf{f}\left(\frac{-\pi}{3}\right) = e^{\frac{\pi}{3}}\left(-\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) + 1\right) \approx -1{,}04 \\ \mathbf{f}\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{\frac{-\pi}{3}}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1\right) \approx 0{,}48 \\ \mathbf{f}(\pi) = e^{-\pi}(-\cos\pi + \sin\pi + 1) = 2e^{-\pi} \approx 0{,}09 \end{cases}$$

Partie B: Aire du logo

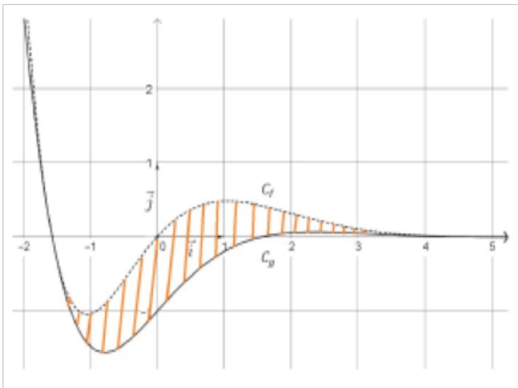
1) $\mathbf{f}(x) - \mathbf{g}(x) = e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) - \left(-e^{-x}\cos x\right) = e^{-x}(\sin x + 1)$

On a: $e^{-x} > 0$ et $-1 \leqslant \sin x$ soit $0 \leqslant \sin x + 1$

Conclusion: $\mathbf{f}(x) - \mathbf{g}(x) \geqslant 0$

La courbe $\mathbf{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathbf{C}_g$.

2)a) Représentation graphique: aire comprise entre les $\mathbf{C}_f$ et $\mathbf{C}_g$ et les droites d'équation $x = \frac{-\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2\pi}$



2)b) $\mathbf{H}(x) = \left(\frac{-\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1\right)e^{-x}$, on admet que H est une primitive de la fonction $x \mapsto e^{-x}(\sin x + 1)$

$$\mathbf{A} = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\mathbf{f}(x) - \mathbf{g}(x)\right) dx = \mathbf{H}\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \mathbf{H}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{2}e^{\frac{-3\pi}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$$

$\mathbf{A} = \frac{-1}{2}e^{\frac{-3\pi}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$ unité d'aire

Comme 1 unité d'aire correspond à $4\,cm^2$ on obtient:

$$\mathbf{A} = \left(\frac{-1}{2}e^{\frac{-3\pi}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}\right) \times 4 \approx 9{,}60\,cm^2$$

Exercice 4:

1) u_n désigne le nombre de cétacés au 1^{er} juin de l'année $(2017+n)$

u_0 le nombre de cétacés le 1^{er} juin 2017

u_1 le nombre de cétacés le 1^{er} juin 2018 $(\ = 2017+1)$

Chaque année: entre le 1^{er} juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine; entre le 1^{er} novembre et le $\mathbf{31}$ mai, la réserve subit une baisse de 5 % (
octobre qui précède.

On ajoute 80 cétécés à u_0 puis l'effectif subit une baisse de 5%

$u_1 = 0{,}95 \times \left(u_0 + 80\right) = 0{,}95 \times (3000 + 80) = 0{,}95 \times 3080$

$u_1 = 2926$

2) u_n désigne le nombre de cétacés au 1^{er} juin de l'année $(2017+n)$

u_{n+1} désigne le nombre de cétacés au 1^{er} juin de l'année $\left(2017+(n+1)\right)$

Chaque année: entre le 1^{er} juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine; entre le 1^{er} novembre et le $\mathbf{31}$ mai, la réserve subit une baisse de 5 % (

octobre qui précède.

On ajoute 80 cétécés à u_n puis l'effectif subit une baisse de 5%

$u_{n+1} = 0{,}95 \times \left(u_n + 80\right) = 0{,}95 \times u_n + 0{,}95 \times 80$

$u_{n+1} = 0{,}95 \times u_n + 76$

3) Les 8 premiers termes:

$u_{n+1} = 0{,}95 \times u_n + 76$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3000	**C 2 = 0,95 × B 2 + 76** **2926**	2856	2789	2725	2665	2608	2553

4)a) Pour tout n entier nautrel, montrons que: $u_n \geqslant 1520$

- Initialisation: $u_0 = 3000 \geqslant 1520$ l'hypothèse de récurence est vraie au rang $n = 0$
- Hérédité: on suppose que $u_n \geqslant 1520$ et on doit montrer que $u_{n+1} \geqslant 1520$

$u_n \geqslant 1520$

$0{,}95 \times u_n \geqslant 0{,}95 \times 1520 = 1444$

$0{,}95 \times u_n + 76 \geqslant 1444 + 76 = 1520$

$u_{n+1} \geqslant 1520$

L'hypothèse de récurrence est vérifiée pour le rang (n+1)

- Conclusion: Pour tout entier naturel n, on a: $u_n \geqslant 1520$

4)b) $u_{n+1} - u_n = 0{,}95 \times u_n + 76 - u_n = -0{,}05 \times u_n + 76 = -0{,}05 \times \left(u_n - \dfrac{76}{0{,}05}\right)$

$u_{n+1} - u_n = -0{,}05 \times \left(u_n - 1520\right)$

On a montré que $u_n \geqslant 1520$ d'où $u_n - 1520 \geqslant 0$

Conclusion: $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, la suite $\left(u_n\right)$ et décroissante.

4)c) La suite $\left(u_n\right)$ est décroissante et minorée par 1520, donc elle est convergente.

5)a) $v_n = u_n - 1520$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 1520 = 0{,}95\ u_n + 76 - 1520 = 0{,}95\ u_n - 1444$

$v_{n+1} = 0{,}95 \times \left(u_n - \dfrac{1444}{0{,}95}\right) = 0{,}95 \times \left(u_n - 1520\right)$

$v_{n+1} = 0{,}95 \times v_n$

La suite $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique de raison $q = 0{,}95$ et de premier terme: $v_0 = u_0 - 1520 = 1480$

5)b) Expression de v_n en fonction de n:

$v_n = v_0 \times q^n = 1480 \times (0{,}95)^n$

Expression de u_n en fonction de n:

$v_n = u_n - 1520 \Leftrightarrow u_n = v_n + 1520$

$u_n = 1520 + 1480 \times (0{,}95)^n$

5)c) $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}95^n = 0$ car $0 \leqslant q \leqslant 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1480 \times 0{,}95^n = 0$

Conclusion: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1520$

6) Algorithme:

$n \leftarrow 0$
$u \leftarrow 3000$
Tant que $u \geqslant 2000$
$n \leftarrow n+1$

$u \leftarrow 0{,}95 \times u + 76$
Fin de Tant que

7) $u_n \leqslant 2000 \Leftrightarrow 1520 + 1480 \times (0{,}95)^n \leqslant 2000 \Leftrightarrow 1480 \times (0{,}95)^n \leqslant 520 \Leftrightarrow 0{,}95^n \leqslant \dfrac{480}{1480}$

$0{,}95^n \leqslant \dfrac{12}{37} \Leftrightarrow \ln\left(0{,}95^n\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{12}{37}\right)$ (car la fonction "ln" est croissante sur $]0\ ;+\infty[$)

$n \times \ln(0{,}95) \leqslant \ln\left(\dfrac{12}{37}\right) \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln\left(\dfrac{12}{37}\right)}{\ln(0{,}95)}$ (car $0{,}95 < 1 \Leftrightarrow \ln 0{,}95 < \ln 1 = 0$)

$\dfrac{\ln\left(\dfrac{12}{37}\right)}{\ln(0{,}95)} \approx 21{,}95$

On choisit $n = 22$

Conclusion: la réserve fermera en $2017 + 22 = \mathbf{2039}$