Correction Métropole S 2018

Exercice 1:

1) $\mathbf{M}\left(x\ ;\ \frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}-2\right)\right)$ et $\mathbf{M'}\left(-x\ ;\ \frac{1}{2}\left(e^{-x}+e^{x}-2\right)\right)$

Largeur de la chaînette: $x-(-x)=2x$

Hauteur: $\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}-2\right)$

On veut que la largeur de l'arc de la chaînette soit égale à sa hauteur:

$$\begin{cases} x>0 \\ 2x=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}-2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 4x=e^{x}+e^{-x}-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ e^{x}+e^{-x}-4x-2=0 \end{cases}$$

2)a) $\mathbf{f}(x)=e^{x}+e^{-x}-4x-2=\left(e^{x}-4x\right)+e^{-x}-2=x\left(\frac{e^{x}}{x}-4\right)+e^{-x}-2$ pour tout $x>0$

2)b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{e^{x}}{x}-4\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathbf{f}(x)=+\infty$

3)a) $x\in[0\ ;+\infty[$, $\mathbf{f}(x)=e^{x}+e^{-x}-4x-2$

La dérivée est: $\mathbf{f'}(x)=e^{x}+\left(-e^{-x}\right)-4=e^{x}-e^{-x}-4$

3)b) $\mathbf{f'}(x)=0 \Leftrightarrow e^{x}-e^{-x}-4=0 \Leftrightarrow e^{x}-\frac{1}{e^{x}}-4=0 \Leftrightarrow \frac{\left(e^{x}\right)^{2}-1-4e^{x}}{e^{x}}=0 \Leftrightarrow \left(e^{x}\right)^{2}-4e^{x}-1=0$

3)c) On pose $\mathbf{X}=e^{x}$

On obtient l'équation suivante: $\mathbf{X}^{2}-4\mathbf{X}-1=0$

Discriminant: $\Delta=b^{2}-4ac=16-4\times1\times(-1)=20=4\times\left(\sqrt{5}\right)^{2}>0$

Deux solutions:

$$\begin{cases} \mathbf{X}_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4-2\sqrt{5}}{2}=2-\sqrt{5}<0 \\ \mathbf{X}_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+2\sqrt{5}}{2}=2+\sqrt{5}>0 \end{cases}$$

La solution qui convient est : $\mathbf{X}_2=2+\sqrt{5}$

D'où $e^{x}=2+\sqrt{5} \Leftrightarrow x=\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$

4)a) Tableau de variations: $\mathbf{f}(x)=e^{x}+e^{-x}-4x-2$

x	0	$\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$	α	$+\infty$
$\mathbf{f'}(x)$	$-$	0		$+$
$\mathbf{f}(x)$	$0 \searrow$	$\mathbf{f}\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)$	$\nearrow 0$	$\nearrow +\infty$

$$\begin{cases} \mathbf{f}(0)=1+1-0-2=0 \\ \mathbf{f}\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)\approx-3{,}3<0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\mathbf{f}(x)=+\infty \end{cases}$$

4)b) $\mathbf{f}(x)=0$ admet une unique solution ***strictement positive***

- Sur l'intervalle $\left[0\ ;\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right]$, la fonction f est continue et srictement décroissante

Or $\mathbf{f}(x)=0$ pour $x=0$ (**solution ne convenant pas**)

- Sur l'intervalle $\left[\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\ ;+\infty\right[$, la fonction f est continue et strictement croissante

On a: $\mathbf{f}\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)\approx-3{,}3<0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathbf{f}(x)=+\infty$

$0\in\left[\mathbf{f}\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)\ ;+\infty\right[$, donc il existe une unique solution $\alpha\in\left[\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\ ;+\infty\right[$ telle que $\mathbf{f}(\alpha)=0$ (d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires).

Conclusion: l'équation $\mathbf{f}(x)=0$ admet une unique solution strictement positive.

5)a) Tableau:

m	a	b	b-a
	2	3	1
2,5	2	2,5	0,5
2,25	2,25	2,5	0,25
2,375	2,375	2,5	0,125
2,4375	2,4375	2,5	$0{,}0625<0{,}1$ Stop

A la fin de l'algorithme on a:

$$\begin{cases} a=2{,}4375 \\ b=2{,}5 \end{cases}$$

5)b) Cet algorithme permet de résoudre l'équation $\mathbf{f}(x)=0$ par ***dichotomie***, sachant que la solution strictement positive α appartient àintervalle $]2\ ;3[$.

On obtient un encadrement au dixième de cette solution : $2{,}4375<\alpha<2{,}5$

6) **(E')**: $e^{\frac{t}{39}}+e^{-\frac{t}{39}}-4\times\frac{t}{39}-2=0$

D'après la question précédente, on a:

$2{,}4375<\alpha<2{,}5 \Leftrightarrow 2{,}4375<\frac{t}{39}<2{,}5 \Leftrightarrow 96{,}0625<t<97{,}5$

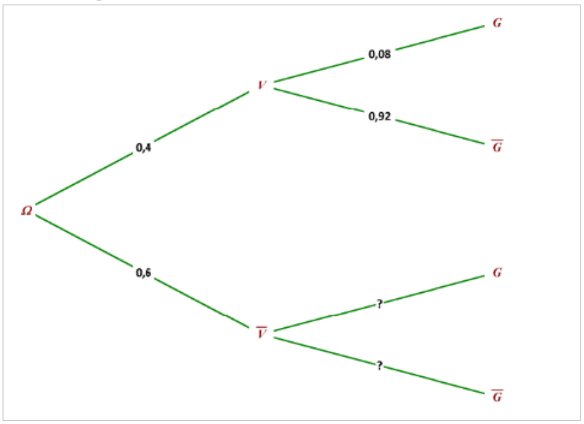
Conclusion: un encadrement de la largeur de cet arc est: $192{,}125<2t<195$

Exercice 2:

Partie A:

1)a) 20% de la population a contracté la grippe: $\mathbf{P(G) = 0,2}$

1)b) Arbre pondéré:



2) La personne choisie a la grippe et est vaccinée:

$\mathbf{P(G \cap V) = P(V) \times P_V(G) = 0,4 \times 0,08 = 0,032}$

3) Formule des probabilités totales:

$$\mathbf{P(G) = P(G \cap V) + P\left(G \cap V^{-}\right) \iff P\left(G \cap V^{-}\right) = P(G) - P(G \cap V)}$$

$$\mathbf{\iff P\left(G \cap V^{-}\right) = 0,2 - 0,032 = 0,168}$$

Donc $\mathbf{P\left(G \cap V^{-}\right) = P\left(V^{-}\right) \times P_{V^{-}}(G) \iff P_{V^{-}}(G) = \dfrac{P\left(G \cap V^{-}\right)}{P\left(V^{-}\right)}}$

$$\mathbf{\iff P_{V^{-}}(G) = \frac{0,168}{0,6} = 0,28}$$

Partie B:

1) On effectue n tirages aléatoires, indépendants et identiques.

Chaque tirage possède deux issues :

- ***Succès***: vacciné $\mathbf{P(V) = p = 0,4}$
- ***Echec***: non vacciné: $\mathbf{q = 1 - p = 0,6}$

La variable aléatoire X est la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées

La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres $\mathbf{n}$ et $\mathbf{p = 0,4}$

2)a) On suppose que $\mathbf{n = 40}$

$$\mathbf{P(X = 15) = \binom{40}{15} p^{15} \times (1-p)^{40-15} = \binom{40}{15} (0,4)^{15} \times (0,6)^{25} \approx 0,123}$$

2)b) Au moins la moitié des personnes interrogées sont vaccinées:

$\mathbf{P(X \geqslant 20) = 1 - P(X < 20) = 1 - P(X \leqslant 19)}$

A la calculatrice on trouve: $\mathbf{P(X \leqslant 19) \approx 0,870}$

Conclusion: $\mathbf{P(X \geqslant 20) = 1 - P(X \leqslant 19) \approx 0,130}$

La probabilité qu'au moins la moitié des personnes soit vaccinée est d'environ 13%.

3) On note $\mathbf{Z = \dfrac{X - 1500}{30}}$ et on admet que Z suit une loi normale centrée réduite.

$$\mathbf{P(1450 < X < 1550) = P\left(\frac{1450 - 1500}{30} < \frac{X - 1500}{30} < \frac{1550 - 1500}{30}\right) = P\left(\frac{-50}{30} < Z < \frac{50}{30}\right)}$$

$$\mathbf{P(1450 < X < 1550) = P\left(\frac{-5}{3} < Z < \frac{5}{3}\right) \approx 0,904} \text{ (à la calculatrice)}$$

Exercice 3:

Partie A:

1)a) Tétraèdre ABCE:

- $\mathbf{[EA]}$ est la hauteur issue de E ;
- $\mathbf{[BC]}$ est la hauteur issue de C.

1)b) Les droites $\mathbf{(EA)}$ et $\mathbf{(BC)}$ ne sont pas concourantes

Les quatre hauteurs du tétraèdre ABCE ne sont pas concourantes.

2)a) Repère $\left(\mathbf{A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE}}\right)$

- Vérifions que le point $\mathbf{A\ (0\ ;\ 0\ ;\ 0)}$ appartient au plan $\mathbf{(ACH)}$:

$\mathbf{x_A - y_A + z_A = 0 - 0 + 0 = 0}$ d'où le point $\mathbf{A}$ appartient au plan $\mathbf{(ACH)}$

- Vérifions que le point $\mathbf{C\ (1\ ;\ 1\ ;\ 0)}$ appartient au plan $\mathbf{(ACH)}$:

$\mathbf{x_C - y_C + z_C = 1 - 1 + 0 = 0}$ d'où le point $\mathbf{C}$ appartient au plan $\mathbf{(ACH)}$

- Vérifions que le point $\mathbf{H\ (0\ ;\ 1\ ;\ 1)}$ appartient au plan $\mathbf{(ACH)}$:

$\mathbf{x_H - y_H + z_H = 0 - 1 + 1 = 0}$ d'où le point $\mathbf{H}$ appartient au plan $\mathbf{(ACH)}$

Les vecteurs $\mathbf{\overrightarrow{AC}\ (1\ ;\ 1\ ;\ 0)}$ et $\mathbf{\overrightarrow{AH}\ (0\ ;\ 1\ ;\ 1)}$ ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles)

Conclusion: Une équation cartésienne du plan $\mathbf{(ACH)}$ est: $\mathbf{x - y + z = 0}$

2)b) Le vecteur $\overrightarrow{FD}$ a pour coordonnées: $F(1\ ;0\ ;1)$ et $D(0\ ;1\ ;0)$
Donc $\overrightarrow{FD}\left(x_D-x_F\ ;y_D-y_F\ ;z_D-z_F\right)$ d'où $\overrightarrow{FD}(-1\ ;1\ ;-1)$ ou $\overrightarrow{DF}(1\ ;-1\ ;1)$
On constate que $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur normal au plan (ACH)
Conclusion: La droite (FD) est la hauteur issue de F du tétraèdre $ACHE$
2)c) La hauteur du tétraèdre régulier $ACHF$ issue de A est $[AG]$
La hauteur issue de C est $[CE]$
La hauteur issue de H est $[BH]$.
Ces quatre hauteurs sont doncconcourantes, ce sont les diagonales du cube

Partie B:

1) La droite (MK) est orthogonale au plan (NPQ) .
Elle est doncorthogonale à toutes les droites de ce plan
Conclusion: la droite (MK) est orthogonale à la droite (PQ) .
2) La droite (PQ) est orthogonale à deux droites sécantes (MK) et (NK) plan (MNK) .
Conclusion: la droite (PQ) est orthogonale au plan (MNK) .
3) La droite (PQ) est orthogonale au plan (MNK) et donc à toutes les droites de ce plan.
Donc la droite (PQ) est orthogonale à la droite (MN) qui appartient au plan (MNK) .
Conclusion: les arêtes $[MN]$ et $[PQ]$ sont orthogonales.

Partie C:

$R(-3\ ;5\ ;2)$, $S(1\ ;4\ ;-2)$, $T(4\ ;-1\ ;5)$ et $U(4\ ;7\ ;3)$
On sait que "deux arêtes d'un tétraèdre sont opposées lorsqu'elles n'ont pas de sommet commun":
on considère les arêtes (RT) et (SU)
De plus on sait que: "Si un tétraèdre est orthocentrique, alors ses arêtes opposées sont orthogonales deux à deux".
$\overrightarrow{RT}\left(4-(-3)\ ;-1-5\ ;5-2\right)$ d'où $\overrightarrow{RT}(7\ ;-6\ ;3)$
$\overrightarrow{SU}\left(4-1\ ;7-4\ ;3-(-2)\right)$ d'où $\overrightarrow{SU}(3\ ;3\ ;5)$
$\overrightarrow{RT}\cdot\overrightarrow{SU}=7\times3+(-6)\times3+3\times5=21-18+15=18\neq0$
Les vecteurs $\overrightarrow{RT}$ et $\overrightarrow{SU}$ ne sont pas orthogonaux, les deux arêtes ne sont pas orthogonales
Le tétraèdre $RSTU$ n'est pas orthocentrique.

Exercice 4:

1)a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times e^{\frac{-i\pi}{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\cos\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times e^{\frac{-i\pi}{6}}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}i=\dfrac{3-i\sqrt{3}}{4}$

1)b) On a $\begin{cases}z_0=8\\ z_{n+1}=\dfrac{3-i\sqrt{3}}{4}\times z_n\end{cases}$

D'où:

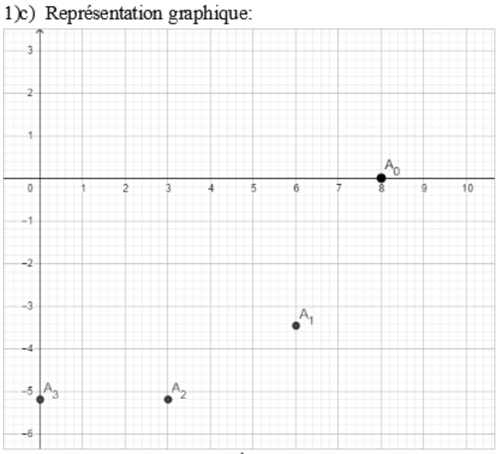
$z_1=\dfrac{3-i\sqrt{3}}{4}\times z_0=\dfrac{3-i\sqrt{3}}{4}\times8=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times e^{\frac{-i\pi}{6}}\times8=4\sqrt{3}\times e^{\frac{-i\pi}{6}}$

$z_2=\dfrac{3-i\sqrt{3}}{4}\times z_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times e^{\frac{-i\pi}{6}}\times4\sqrt{3}\times e^{\frac{-i\pi}{6}}=6\times e^{\frac{-i\pi}{3}}$ (car $e^a\times e^b=e^{a+b}$)

$z_3=\dfrac{3-i\sqrt{3}}{4}\times z_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times e^{\frac{-i\pi}{6}}\times6\times e^{\frac{-i\pi}{3}}=3\sqrt{3}\times e^{\frac{-i\pi}{2}}=-3i\sqrt{3}$ (car $e^{\frac{-i\pi}{2}}=-i$)

Donc z_3 est un imaginaire pur.

1)c) Représentation graphique:



2)a) $z_n=8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\times e^{\frac{-in\pi}{6}}$

- ***Initialisation***: $z_0=8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^0\times e^0=8$ vrai pour $n=0$

- ***Hérédité***: on suppsose que la propriété est vraie au rang n

On doit montrer qu'elle est vraie au rang $(n+1)$

$$z_{n+1}=\frac{3-i\sqrt{3}}{4}\times z_n=\frac{\sqrt{3}}{2}\times e^{\frac{-i\pi}{6}}\times 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\times e^{\frac{-in\pi}{6}}$$

$$z_{n+1}=8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\times e^{\frac{-(n+1)\pi}{6}}$$

La propriété est vraie au rang $(n+1)$

- ***Conclusion***: Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $z_n=8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\times e^{\frac{-in\pi}{6}}$

2)b) Pour tout n, on pose: $u_n=|z_n|$

$$u_n=|z_n|=\left|8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\times e^{\frac{-in\pi}{6}}\right|=8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\times\left|e^{\frac{-in\pi}{6}}\right| \text{ or } \left|e^{\frac{-in\pi}{6}}\right|=1$$

Donc $u_n=8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

La suite (u_n) est géométrique de raison $q=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et de premier terme $u_0=8$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=?$$

$$0<q=\frac{\sqrt{3}}{2}<1 \text{ d'où } \lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)=0$$

Conclusion: $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$

3)a)
$$\frac{z_{k+1}-z_k}{z_{k+1}}=1-\frac{z_k}{z_{+1}}=1-\frac{8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k\times e^{\frac{-ik\pi}{6}}}{8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k+1}\times e^{\frac{-i(k+1)\pi}{6}}}=1-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\times e^{\frac{i\pi}{6}} \quad \left(\text{car } \frac{e^a}{e^b}=e^{a-b}\right)$$

$$\frac{z_{k+1}-z_k}{z_{k+1}}=1-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=1-1-i\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{i\sqrt{3}}{3}=-i\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left|\frac{z_{k+1}-z_k}{z_{k+1}}\right|=\left|-i\frac{1}{\sqrt{3}}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{A_kA_{k+1}}{0A_{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

D'où $A_kA_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{3}}OA_{k+1}$

3)b) $l_n=A_0A_1+A_1A_2+\cdots A_{n-1}A_n$

$$A_0A_1=\frac{1}{\sqrt{3}}OA_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\times 4\sqrt{3}=4 \quad \left(\text{car } z_1=4\sqrt{3}\times e^{\frac{-i\pi}{6}} \text{ d'où } OA_1=4\sqrt{3}\right)$$

$$l_n=A_0A_1+A_1A_2+\cdots A_{n-1}A_n=\frac{1}{\sqrt{3}}OA_1+\frac{1}{\sqrt{3}}OA_2+\cdots+\frac{1}{\sqrt{3}}OA_n$$

$$l_n=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(OA_1+OA_2+\cdots+OA_n\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(u_1+u_2+\cdots+u_n\right) \quad \left(\text{car } u_n=|z_n|=|z_n-z_0|=OA_n\right)$$

La suite (u_n) est géométrique de raison $q=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$u_1+u_2+\cdots+u_n=u_1\times\frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=4\sqrt{3}\times\frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$l_n=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(u_1+u_2+\cdots+u_n\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\times u_1\times\frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times 4\sqrt{3}\times\frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$l_n=4\times\frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)=0 \text{ d'où } \lim_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)=1$$

Conclusion: $\lim_{n\to+\infty}\left(4\times\frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\right)=\frac{4}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Donc la suite (l_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} l_n=\frac{4}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$