Correction Métropole ES 2018

Exercice 1:

Partie A:

X est la variable aléatoire qui compte le temps passé en minutes par un client dans un supermarché
X suit une loi normale d'espérance $\mu = 45$ et d'écart type $\sigma = 12$
1)a) $\mathbf{X = 10}$: le client passe exactement 10 minutess dans ce supermarché:
$\mathbf{P(X = 10) = 0}$ car la variable aléatoire $\mathbf{X}$ suit la loi $\mathbf{N(45\ ;\ 12^2)}$ qui est continue
1)b) $\mathbf{X \geqslant 45}$: le client passe au moins $\mathbf{45}$ minutess dans ce supermarché:
A la calculatrice:
$\mathbf{P(X \geqslant 45) = P(X \geqslant \mu) \approx 0{,}50}$
50% des clients passent entre au minimum 45 minutes dans le supermarché
1)c) $\mathbf{21 \leqslant X \leqslant 69}$: le temps passé dans le supermarché par le client se situe dans l'intervalle $[\mathbf{21\ ;\ 69}]$
A la calculatrice:
$\mathbf{P(21 \leqslant X \leqslant 69) = P(45 - 2 \times 12 \leqslant X \leqslant 45 + 2 \times 12) = P(\mu - 2\,\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2) \approx 0{,}95}$
95% des clients passent entre 21 et 69 minutes dans le supermarché
1)d) $\mathbf{21 \leqslant X \leqslant 45}$: le temps passé dans le supermarché par le client se situe dans l'intervalle $[\mathbf{21\ ;\ 45}]$
A la calculatrice:
$\mathbf{P(21 \leqslant X \leqslant 45) = \frac{1}{2} \times P(21 \leqslant X \leqslant 69) \approx 0{,}475}$ (symétrie axiale par rapport à $x = \mu$)
47,5% des clients passent entre 21 et 45 minutes dans le supermarché
2) $\mathbf{30 \leqslant X \leqslant 60}$: le temps passé dans le supermarché par le client se situe dans l'intervalle $[\mathbf{30\ ;\ 60}]$
A la calculatrice:
$\mathbf{P(30 \leqslant X \leqslant 60) \approx 0{,}789}$ (arrondie au millième)
78,9% des clients passent entre 30 et 60 minutes dans le supermarché
3) $\mathbf{P(X \leqslant a) = 0{,}30}$
A la calculatrice, on trouve: $\mathbf{a \approx 39}$ (arrondi à l'unité)
30% des clients passent au plus 39 minutes dans le supermarché

Partie B:

1) Intervalle de fluctuation:
$p = 0{,}89$, $n = 300 \geqslant 30$
$n\,p = 267 \geqslant 5$ et $n\,(1 - p) = 33 \geqslant 5$
Les conditions sont réunies:
$$\mathbf{I} = \left[p - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}\ ; p + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}} \right] = \left[0{,}89 - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}89 \times 0{,}11}{300}}\ ; 0{,}89 + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}89 \times 0{,}11}{300}} \right]$$
$\mathbf{I} \approx [0{,}85\ ;\ 0{,}93]$
2) Sur 300 clients choisis au hasard 286 déclarent être satisfaits.
La fréquence observée est: $f_{obs} = \frac{286}{300} \approx 0{,}95$
3) $f_{obs} \notin \mathbf{I}$, on peut rejeter l'information que le taux de satisfaction des clients est resté stable entre 2013 et 2018.

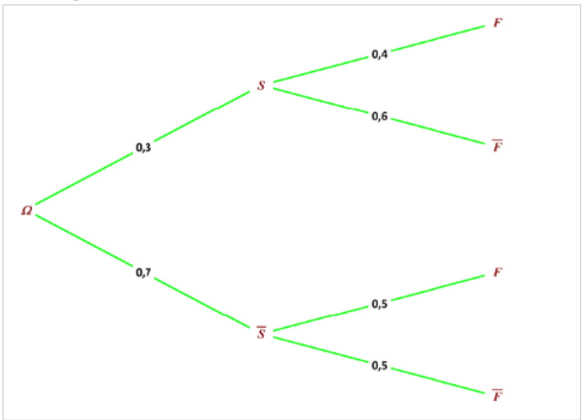
Exercice 2:

Partie A:

S:"l'élève est inscrit dans un club de sport"
F:"l'élève est une fille"
1) La probabilité $\mathbf{P_{\overline{F}}(S)}$ est la probabilité que l'élève est inscrit dans un club de sport sachant que c'est un garçon.

Réponse A

2) Arbre pondéré:



On admet que:
$\mathbf{P(F) = 0{,}47}$
$\mathbf{P_F(S) = \frac{P(F \cap S)}{P(F)} = \frac{0{,}3 \times 0{,}4}{0{,}7}}$
$\mathbf{P_F(S) \approx 0{,}255}$
Réponse B

Partie B:

1) Tangente à la courbe C_g au point d'abscisse $a=1$

Equation: $y=g'(a)(x-a)+g(a)=g'(1)(x-1)+g(1)$

$g(x)=\boxed{-x^3+3x^2-1}$, g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, $g'(x)=-3x^2+6x$

Donc $\begin{cases} g(1)=1 \\ g'(1)=3 \end{cases}$

L'équation de la tangente est: $y=3(x-1)+1=3x-2$

Réponse B

2) $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx=\frac{1}{a-(-1)}\int_{-1}^a g(x)\,dx=\frac{1}{a+1}\int_{-1}^a\left(-x^3+3x^2-1\right)dx$

$\mu=\frac{1}{a+1}\left[-\frac{x^4}{4}+x^3-x\right]_{-1}^a=\frac{1}{a+1}\left[\left(-\frac{a^4}{4}+a^3-a\right)-\left(-\frac{1}{4}+1-1\right)\right]$

La valeur moyenne est nulle: $\mu=0$

$\frac{1}{a+1}\left[\left(-\frac{a^4}{4}+a^3-a\right)-\left(-\frac{1}{4}+1-1\right)\right]=0 \Leftrightarrow \left(-\frac{a^4}{4}+a^3-a\right)-\left(-\frac{1}{4}+1-1\right)=0$

$-\frac{a^4}{4}+a^3-a+\frac{1}{4}=0$

- Si $a=0$ alors $\frac{1}{4}=0$ donc 0 n'est pas solution de l'équation
- Si $a=1$ alors $-\frac{1}{4}+1-1+\frac{1}{4}=0$ donc 1 est solution de cette équation
- Si $a=2$ alors $-\frac{2^4}{4}+2^3-2+\frac{1}{4}=-4+8-2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}\neq 0$ donc 2 n'est pas solution de cette équation
- Si $a=3$ alors $-\frac{3^4}{4}+3^3-3+\frac{1}{4}=-\frac{81}{4}+27-3+\frac{1}{4}=4\neq 0$ donc 2 n'est pas solution de cette équation

Réponse B

Exercice 3:

1) Le 1^{er} janvier 2018, le niveau d'eau du lac était de 605 cm

- Augmentation de 6% grâce à la rivière
- Baisse de 15cm liée à l'écoulement à travers le barrage

$u_0=605$

$u_1=1{,}06\,u_0-15=626{,}30$

Le 2 janvier, le niveau d'eau du lac était de 626,30 cm

2) u_n représente le niveau d'eau du lac en cm n jours après le 1^{er} janvier

u_{n+1} le niveau d'eau le jour suivant

- Augmentation de 6% grâce à la rivière, ce qui correspond à: $1{,}06\times u_n$
- Baisse de 15cm liée à l'écoulement à travers le barrage

$u_{n+1}=1{,}06\,u_n-15$

2)a) $v_n=u_n-250$

$v_{n+1}=u_{n+1}-250=1{,}06\,u_n-15-250=1{,}06\,u_n-265$

$v_{n+1}=1{,}06\left(u_n-\frac{265}{1{,}06}\right)=1{,}06\left(u_n-250\right)=1{,}06\,v_n$

La suite $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique de raison $q=1{,}06$ et de premier terme $v_0=u_0-250=605-250=355$

2)b) Expression de v_n en fonction de n:

$v_n=v_0\times q^n=355\times(1{,}06)^n$

Expression de u_n en fonction de n:

$v_n=u_n-250 \Leftrightarrow u_n=v_n+250$

Donc $u_n=355\times(1{,}06)^n+250$

3)a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(355\times 1{,}06^n-250\right)=?$

$q=1{,}06>1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}06^n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 355\times 1{,}06^n=+\infty$

Conclusion: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

3)b) Si le niveau dépasse 10m, soit 1000cm, l'équipe d'entretien doit agrandir l'ouverture des vannes du barrage

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$, l'équipe devra agrandir les vannes.

4)a)

```
N ← 0
U ← 605
Tant que U < 1000 faire
    U ← 1,06 U − 15
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

4)b) A la calculatrice, on obtient: $\mathbf{N=13}$

4)c) Les techniciens interviendront le **14 janvier 2018**

Exercice 4:

La fonction f est définie sur l'intervalle $[-2\ ;4]$ par:

$\mathbf{f}(x)=(2x+1)\,e^{-2x}+3$

1) f est dérivable sur $[-2\ ;4]$

La fonction est de la forme $u\times v$ avec $\begin{cases} u=2x+1 \\ v=e^{-2x} \end{cases}$, forme de la dérivée $u'\times v+u\times v'$ avec $\begin{cases} u'=2 \\ v'=-2\,e^{-2x} \end{cases}$

$\mathbf{f}'(x)=2\,e^{-2x}+(2x+1)\times\left(-2\,e^{-2x}\right)+0=\cancel{2\,e^{-2x}}-4x\,e^{-2x}-\cancel{2\,e^{-2x}}$

$\mathbf{f}'(x)=-4\,e^{-2x}$

2) Variations de f:

Le signe de $\mathbf{f}'(x)$ dépend du signe de $(-4x)$ car $e^{-2x}>0$

Donc $\mathbf{f}'(x)\geqslant 0$ si $x\in[-2\ ;0]$ et $\mathbf{f}'(x)\leqslant 0$ si $x\in[0\ ;4]$ et $\mathbf{f}'(x)=0$ si $x=0$

Tableau de variations:

x	-2		0		4
$\mathbf{f}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathbf{f}(x)$	$\mathbf{f}(-2)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$\mathbf{f}(4)$

$\begin{cases} \mathbf{f}(-2)=-3\,e^{4}+3\approx-160{,}794<0 \\ \mathbf{f}(0)=1+3=4 \\ \mathbf{f}(4)=9\,e^{-8}+3\approx 3{,}003>0 \end{cases}$

3) $\mathbf{f}(0)>4$ et $\mathbf{f}(4)>0$ donc l'équation $\mathbf{f}(x)=0$ n'a pas de solution sur l'intervalle $[0\ ;4]$

Sur l'intervalle $[-2\ ;0]$ la fonction est continue et strictement croissante

On sait que: $\begin{cases} \mathbf{f}(-2)<0 \\ \mathbf{f}(0)>0 \end{cases}$ donc $0\in]\,\mathbf{f}(-2)\ ;\mathbf{f}(0)\,[$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Il existe une unique solution $\alpha\in]-2\ ;0[$ tel que $\mathbf{f}(\alpha)=0$

A la calculatrice, on obtient une valeur apparochée de α: $\alpha\approx-0{,}8$

4)a) On admet que: $f''(x)=(8x-4)\,e^{-2x}$

Le signe de $f''(x)$ dépend du signe de $(8x-4)$ car $e^{-2x}>0$

Donc $f''(x)\geqslant 0$ si $x\in\left[\frac{1}{2}\ ;4\right]$ et $f''(x)\leqslant 0$ si $x\in\left[-2\ ;\frac{1}{2}\right]$ et $f''(x)=0$ si $8x-4=0 \Leftrightarrow x=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

4)b) f est convexe sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;4\right]$ car $f''(x)\geqslant 0$ pour tout $x\in\left[\frac{1}{2}\ ;4\right]$

5)a) $\mathbf{g}(x)=(2x+1)\,e^{-2x}$

$\mathbf{G}(x)=(-x-1)\,e^{-2x}$

$\mathbf{G}'(x)=-1\,e^{-2x}+(-x-1)\times\left(-2\,e^{-2x}\right)=-e^{-2x}+2x\,e^{-2x}+2\,e^{-2x}=2x\,e^{-2x}+1\,e^{-2x}$

$\mathbf{G}'(x)=(2x+1)\,e^{-2x}=\mathbf{g}(x)$

La fonction G est une primitive de la fonction g .

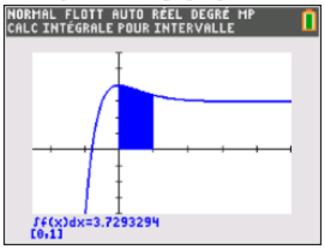
5)b) $\mathbf{f}(x)=(2x+1)\,e^{-2x}+3=\mathbf{g}(x)+3$

Une primitive de la fonction f est:

$\mathbf{F}(x)=\mathbf{G}(x)+3x$

Donc une primitive de la fonction f est : $\mathbf{F}(x)=(-x-1)\,e^{-2x}+3x$

6)a) Représentation graphique:



6)b) Graphiquement on lit: $3\leqslant\mathbf{A}\leqslant 4$

6)c) $\mathbf{A}=\int_0^1 \mathbf{f}(x)\,dx=\left[\mathbf{F}(x)\right]_0^1=\mathbf{F}(1)-\mathbf{F}(0)=(-1-1)\,e^{-2}+3-(-1)\,e^{0}-0$

$\mathbf{A}=-2\,e^{-2}+3+1$

$\mathbf{A}=-2\,e^{-2}+4\approx 3{,}73\ u\cdot a$