Correction Liban S 2018

Exercice 1:

1) Le temps d'attente en seconde est modélisé par la variable $\mathbf{X}$ qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}02\ s^{-1}$.

Donc le temps d'attente moyen est : $\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \dfrac{1}{\lambda} = 50$

La variable Y modélise le temps d'échange, Y suit une loi normale $\mu = 96$ et $\sigma = 26$:
donc le temps d'échange moyen est : $\mathbf{E}(\mathbf{Y}) = \mu = 96$

Conclusion: La durée totale moyenne d'un appel est: $\mathbf{E}(\mathbf{X}) + \mathbf{E}(\mathbf{Y}) = 146$, la durée totale moyenne d'un appel au standard téléphonique est de 146 secondes

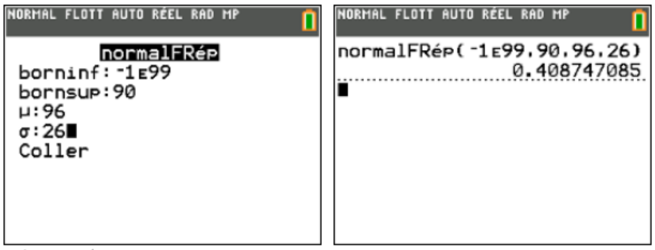
2)a) 2 minutes équivaut à $120\ s$

$\mathbf{P}(\mathbf{X} \geqslant 120) = 1 - \mathbf{P}(\mathbf{X} < 120) = 1 - \left(1 - \left(e^{-0{,}02 \times 120}\right)\right) = e^{-2{,}4}$

$\mathbf{P}(\mathbf{X} \geqslant 120) \approx 0{,}091$

2)b) On calcule $\mathbf{P}(\mathbf{Y} \leqslant 90)$:

A la calculatrice:



$\mathbf{P}(\mathbf{Y} \leqslant 90) \approx 0{,}409$

3) **Durée de vie sans vieillissement :**

Soit X une variable aléatoire correspondant à la durée de vie d'un individu ou d'un objet.
On dit que X suit la loi de durée de ***vie sans vieillissement*** (on dit aussi ***"sans usure"*** ou ***"sans mémoire")*** lorsque la probabilité que l'objet fonctionne à l'instant $t+h$ sachant qu'il fonctionne à l'instant **t** ne dépend que de **h** :
pour tous réels t et h strictement positifs on a:

$$\mathbf{P}_{(\mathbf{X} \geqslant t)}(\mathbf{X} \geqslant t+h) = \mathbf{P}(\mathbf{X} \geqslant h)$$

La loi de durée de vie sans vieillissement est une loi exponentielle.

$\mathbf{P}_{(\mathbf{X} \geqslant 60)}(\mathbf{X} \geqslant 90) = \mathbf{P}_{(\mathbf{X} \geqslant 60)}(\mathbf{X} \geqslant 60 + 30) = \mathbf{P}(\mathbf{X} \geqslant 30)$

$\mathbf{P}_{(\mathbf{X} \geqslant 60)}(\mathbf{X} \geqslant 90) = e^{-30 \times 0{,}02} = e^{-0{,}6}$

$\mathbf{P}_{(\mathbf{X} \geqslant 60)}(\mathbf{X} \geqslant 90) \approx 0{,}549$

Exercice 2:

1) On pose: $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 - i$

Pour $z_1 = 1 + i$ d'où $\begin{cases} |z_1| = |1+i| = \sqrt{2} \\ \cos\theta_1 = \dfrac{a}{|z_1|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \sin\theta_1 = \dfrac{b}{|z_1|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \ donc\ \theta_1 = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

Pour $z_2 = 1 - i$ d'où $\begin{cases} |z_2| = |1-i| = \sqrt{2} \\ \cos\theta_2 = \dfrac{a}{|z_2|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \sin\theta_2 = \dfrac{b}{|z_2|} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\ \ donc\ \theta_2 = \dfrac{-\pi}{4} \end{cases}$

Formes exponentielles: $z = \lvert z\rvert\ e^{i\theta}$	*Formes trigonométriques:* $z = \lvert z\rvert\ (\cos\theta + i\sin\theta)$
$z_1 = \sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}}$ $z_2 = \sqrt{2}\ e^{-i\frac{\pi}{4}}$	$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$

z_1 et z_2 sont conjugués

2)a) $\mathbf{S}_n = (1+i)^n + (1-i)^n = z_1^n + z_2^n$

$z_1 = \sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $z_1^n = \left(\sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \times \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \times e^{i\frac{n\pi}{4}}$

$z_2 = \sqrt{2}\ e^{i\frac{-\pi}{4}}$ donc $z_2^n = \left(\sqrt{2}\ e^{i\frac{-\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \times \left(e^{i\frac{-\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \times e^{-i\frac{n\pi}{4}}$

D'où $\mathbf{S}_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \times \left(e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^n \times \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{-n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-n\pi}{4}\right)\right)$

$\cos(x) = \cos(-x)$ et $\sin(x) = -\sin(-x)$

$\mathbf{S}_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \times \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \cancel{+ i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)} + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \cancel{- i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}\right)$

On obtient donc: $\mathbf{S}_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \times \left(2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$

Pour déterminer la forme trigonométrique, cherchons le module et l'argument:

$$|S_n| = \left|\left(\sqrt{2}\right)^n \times \left(2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)\right| = 2\left(\sqrt{2}\right)^n \times \left|\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right|$$

$$\operatorname{Arg} S_n = \arg\left(\left(\sqrt{2}\right)^n \times 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$$

Cherchons le signe de $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$:

Valeurs prises par $\frac{n\pi}{4}$: (le cas $n=8$ revient au cas $n=0$)

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$\left(\frac{n\pi}{4}\right)=$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
signe $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$:	+	+	0	-	-	-	0	+

$S_n = 0$ si $\begin{cases} \frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \frac{n\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \left(= \frac{-\pi}{2} + 2k\pi \right) \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$ soit $\begin{cases} n = 2 + 8k \\ n = 6 + 8k \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$

$S_n > 0$ si $\begin{cases} \frac{n\pi}{4} = 0 + 2k\pi \\ \frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{n\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \left(= \frac{-\pi}{4} + 2k\pi \right) \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$ soit $\begin{cases} n = 8k \\ n = 1 + 8k \\ n = 7 + 8k \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$

On peut donc écrire: $S_n = \left|\left(\sqrt{2}\right)^n\right| \times \left|\left(2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)\right| \times \left(\cos(0) + i\sin(0)\right)$

$S_n < 0$ si $\begin{cases} \frac{n\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{n\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \left(= \frac{-3\pi}{4} + 2k\pi \right) \\ \frac{n\pi}{4} = \pi + 2k\pi \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$ soit $\begin{cases} n = 3 + 8k \\ n = 5 + 8k \\ n = 4 + 8k \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$

On peut donc écrire: $S_n = \left|\left(\sqrt{2}\right)^n\right| \times \left|\left(2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)\right| \times \left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right)$

2)b) ***Affirmation A: Exacte*** car $S_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \times \left(2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) \in \mathbb{R}$

Affirmation B: Exacte car $S_n = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0$ pour $\begin{cases} n = 2 + 8k \\ n = 6 + 8k \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 3:

1)a) Coordonnées du point: $S_1(t) \begin{cases} x_1(t) = 140 - 60t \\ y_1(t) = 105 - 90t, \ t \geqslant 0 \\ z_1(t) = -170 - 30t \end{cases}$

Coordonnées du sous-marin au début, c'est àdire $t=0$

$$S_1(0) \begin{cases} x_1(0) = 140 \\ y_1(0) = 105 \\ z_1(0) = -170 \end{cases}$$

1)b) Vitesse du sous-marin: On dérive les coordonnées par rapport au temps

$$\overrightarrow{v_1(t)} \begin{cases} \frac{dx_1}{dt}(t) = -60 \\ \frac{dy_1}{dt}(t) = -90 \\ \frac{dz_1}{dt}(t) = -30 \end{cases}$$

La norme de ce vecteur nous donne la vitesse :

$$\left\|\vec{v}_1(t)\right\| = \sqrt{(-60)^2 + (-90)^2 + (-30)^2} = \sqrt{12600} \approx 112{,}25$$

$v_1 \approx 112{,}25$ m/ min soit $v_1 \approx 6{,}73\ km\,h^{-1}$

2) $\mathbf{A}=\mathbf{S}_1(1)\begin{cases}x_1(1)=80\\ y_1(1)=15\\ z_1(1)=-200\end{cases}$ et $\mathbf{B}=\mathbf{S}_1(0)\begin{cases}x_1(0)=140\\ y_1(0)=105\\ z_1(0)=-170\end{cases}$ on a: $\overrightarrow{\mathbf{BA}}(-60,\ -90,\ -30)$

Dans le plan vertical contenant la trajectoire du premier sous-marin:
on considère le point ayant la même abscisse et la même ordonnée que A et la même côte que B, d'où $\mathbf{C}(80,15,\ -170)$

$\overrightarrow{\mathbf{BC}}(-60,\ -90,\ 0)$

On calcule le produit scalaire $\overrightarrow{\mathbf{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{BC}}$ de deux façons différentes:

$\overrightarrow{\mathbf{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{BC}}=xx'+yy'+zz'=(-60)\times(-60)+(-90)\times(-90)=11700$

$\overrightarrow{\mathbf{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{BC}}=\|\overrightarrow{\mathbf{BA}}\|\times\|\overrightarrow{\mathbf{BC}}\|\cos\left(\overrightarrow{\mathbf{BA}},\ \overrightarrow{\mathbf{BC}}\right)=\sqrt{12600}\times\sqrt{11700}\ \cos\alpha$

Donc $\cos\alpha=\dfrac{11700}{\sqrt{12600}\times\sqrt{11700}}\approx 0{,}964$

Conclusion: $\alpha\approx 15{,}4\,°$

3) Au début de l'observation, le second sous-marin est situé au point $\mathbf{S}_2(0)$ de coordonnées $(68,135,\ -68)$

Il atteint au bout de trois minutes le point $\mathbf{S}_2(3)$ de coordonnées $(-202,\ -405,\ -248)$ avec une vitesse constante.

Coordonnées du point: $\mathbf{S}_2(t)\begin{cases}x_2(t)=68+\alpha\, t\\ y_2(t)=135+\beta\, t\ ,\ t\in\mathbf{R}\\ z_2(t)=-68+\gamma\, t\end{cases}$

$\mathbf{S}_2(3)\begin{cases}x_2(3)=68+3\alpha=-202\\ y_2(3)=135+3\beta=-405\\ z_2(3)=-68+3\gamma=-248\end{cases}$ on obtient donc $\begin{cases}3\alpha=-270\\ 3\beta=-540\\ 3\gamma=-180\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-90\\ \beta=-180\\ \gamma=-60\end{cases}$

Finalement, les coordonnées du point: $\mathbf{S}_2(t)\begin{cases}x_2(t)=68-90\,t\\ y_2(t)=135-180\,t\ ,\ t\in\mathbf{R}\\ z_2(t)=-68-60\,t\end{cases}$

Les deux sous marins sont à la même profondeur si:

$z_1(t)=z_2(t)\ \Leftrightarrow\ -68-60\,t=-170-30\,t\ \Leftrightarrow\ 102=30\,t\ \Leftrightarrow\ t=\dfrac{102}{30}=3{,}4$

Au bout de 3 min $24\ s$ (car $0{,}4$ minutes correspond à 24 secondes), les deux sous marins seront à la même profondeur.

Exercice 4:

1) La fonction f_n est définie et dérivable sur l'intervalle [1;5].

(Forme $\dfrac{u}{v}$ donc sa dérivée est: $\dfrac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$)

Pour n entier, n≥1 et $x\in[1\ ;\ 5]$ on a:

$$f_n'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x^n-n\,x^{n-1}\times\ln x}{\left(x^n\right)^2}=\frac{x^{n-1}-n\,x^{n-1}\times\ln x}{x^{2n}}=\frac{x^{n-1}(1-n\times\ln x)}{x^{2n}}$$

$$f_n'(x)=\frac{1-n\times\ln x}{x^{2n+1-n}}=\frac{1-n\times\ln x}{x^{n+1}}$$

2) On admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $[1\ ;\ 5]$.

On note $\mathbf{A}_n$ le point de la courbe $\mathbf{C}_n$ ayant pour ordonnée ce maximum.

Pour tout entier naturel n non nul, le maximum est atteint quand $f_n'(x)=\dfrac{1-n\times\ln x}{x^{2n+1-n}}=0$

Ce qui correspond à : $1-n\times\ln x=0\ \Leftrightarrow\ n\ln x=1\ \Leftrightarrow\ \ln x^n=\ln e$ (car $\ln e=1$ et $n\ln a=\ln a^n$)

Ce qui équivaut à : $x^n=e\ \Leftrightarrow\ x=e^{\frac{1}{n}}$

D'où le tableau de variations:

x	1	$e^{\frac{1}{n}}$	5
$f_n(x)$	$0\nearrow$	$\dfrac{1}{ne}$	$\searrow\ \dfrac{\ln 5}{5^n}$

$$\begin{cases}f_n(1)=0\\ f_n\left(e^{\frac{1}{n}}\right)=\dfrac{\ln e^{\frac{1}{n}}}{\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}=\dfrac{\frac{1}{n}\ln e}{e}=\dfrac{1}{ne}\\ f_n(5)=\dfrac{\ln 5}{5^n}\end{cases}$$

Les coordonnées des points $\mathbf{A}_n$ sont : $\mathbf{A}_n\left(e^{\frac{1}{n}}\ ;\ \dfrac{1}{ne}\right)$

Vérifions que les points $\mathbf{A}_n$ appartiennent à la même courbe Γ :

Si les points $\mathbf{A}_n$ appartiennent à cette courbe alors les coordonnées de ces points vérifient l'équation de celle-ci:

$y=\dfrac{1}{e}\ln e^{\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{e}\times\dfrac{1}{n}\ln e=\dfrac{1}{ne}=y_{\mathbf{A}_n}$

Les points $\mathbf{A}_n$ appartiennent à la courbe.

3)a) $x\in[1\ ;\ 5]$

$1\leqslant x\leqslant 5\ \Leftrightarrow\ \ln 1\leqslant\ln x\leqslant\ln 5$ (car la fonction"ln" est croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$)

$0 \leqslant \ln x \leqslant \ln 5 \iff 0 \leqslant \frac{\ln x}{x^n} \leqslant \frac{\ln 5}{x^n}$

3)b) $\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx = \int_1^5 x^{-n}\,dx = \left[\frac{x^{1-n}}{1-n}\right]_1^5 = \frac{5^{1-n}}{1-n} - \frac{1}{1-n} = \frac{1}{1-n}\left(\frac{1}{5^{n-1}} - 1\right) = \frac{-1}{1-n}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)$

$\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)$

3)c) Pour tout n non nul, la fonction f_n es positive sur l'intervalle $[1\,;5]$ ($x \geqslant 1$ donc $\ln x \geqslant 0$)

D'après la question 3)a), on a: $0 \leqslant \frac{\ln x}{x^n} \leqslant \frac{\ln 5}{x^n}$

$0 \leqslant \frac{\ln x}{x^n} \leqslant \frac{\ln 5}{x^n} \iff 0 \leqslant \int_1^5 \frac{\ln x}{x^n}\,dx \leqslant \int_1^5 \frac{\ln 5}{x^n}\,dx$ (d'après la positivité de l'intégrale).

avec $\int_1^5 \frac{\ln 5}{x^n}\,dx = \ln 5 \int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx = \ln 5 \times \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right) = \frac{\ln 5}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)$

$0 \leqslant \int_1^5 \frac{\ln x}{x^n}\,dx \leqslant \frac{\ln 5}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right) = 1$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5^{n-1}}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln 5}{n-1} = 0$

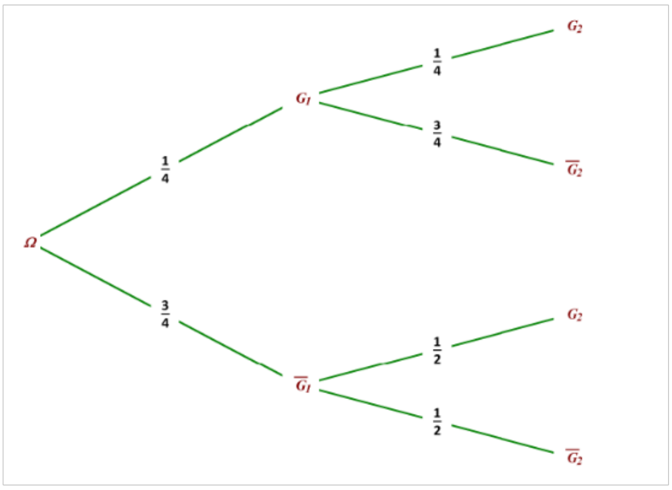
Par conséquent d'après le théorème d'encadrement :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \int_1^5 \frac{\ln x}{x^n}\,dx = 0$

La limite de cette aire vaut 0 quand n tend vers $+\infty$

Exercice 5:

1) Arbre pondéré:

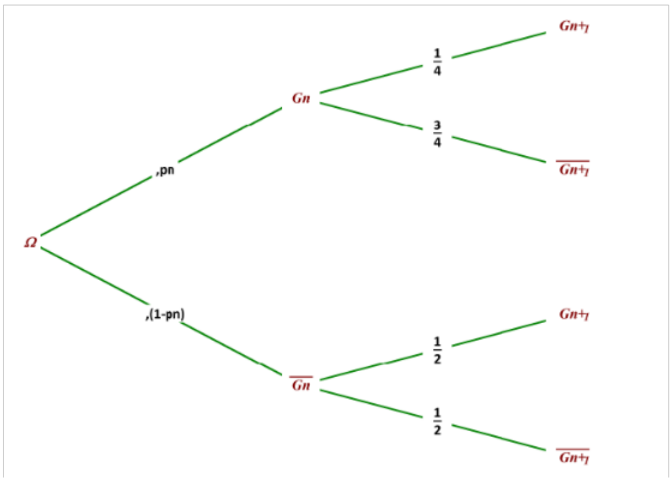


Probabilités totales:

$p_2 = P(G_2) = P(G_1 \cap G_2) + P(\bar{G_1} \cap G_2) = P(G_1) \times P_{G_1}(G_2) + P(\bar{G_1}) \times P_{\bar{G_1}}(G_2)$

$p_2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16} + \frac{3}{8} = \frac{1}{16} + \frac{6}{16}$ donc $p_2 = \frac{7}{16}$

2) Arbre pondéré:



$$p_{n+1}=P(G_{n+1})=P(G_n\cap G_{n+1})+P(\bar{G}_n\cap G_{n+1})=P(G_n)\times P_{G_n}(G_{n+1})+P(\bar{G}_n)\times P_{\bar{G}_n}(G_{n+1})$$

$p_{n+1}=p_n\times\frac{1}{4}+(1-p_n)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\times p_n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times p_n=\frac{-1}{4}\times p_n+\frac{1}{2}$ donc $p_{n+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\times p_n$

3) Il semblerait que la suite (p_n) converge vers $0{,}4$

4)a) $u_n=p_n-\frac{2}{5}$

$$u_{n+1}=p_{n+1}-\frac{2}{5}=\left(\frac{-1}{4}\right)p_n+\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\left(\frac{-1}{4}\right)p_n+\frac{1}{10}=\frac{-1}{4}\left(p_n-\frac{4}{10}\right)=\frac{-1}{4}\left(p_n-\frac{2}{5}\right)$$

$u_{n+1}=\frac{-1}{4}u_n$

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q=\frac{-1}{4}$ et de premier terme: $u_1=p_1-\frac{2}{5}=\frac{1}{4}-\frac{2}{5}=\frac{-3}{20}$

4)b) Expression de u_n en fonction de n:

$u_n=u_1\times(q)^{n-1}=\frac{-3}{20}\times\left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1}$

Expression de p_n en fonction de n:

$u_n=p_n-\frac{2}{5}$ d'où $p_n=u_n+\frac{2}{5}$

On obtient: $p_n=\frac{-3}{20}\times\left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1}+\frac{2}{5}$

4)c) $p_n=\frac{-3}{20}\times\left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1}+\frac{2}{5}$ comme $\left|\frac{-1}{4}\right|<1$ on a: $\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1}\right)=0$

Donc $\lim_{n\to+\infty}p_n=\frac{2}{5}$

La suite (p_n) converge vers $\frac{2}{5}=0{,}4$

Ce qui signifie que sur le long terme, la probabilité qu'un joueur gagne une partie est de $0{,}4$.